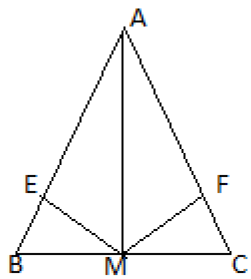
20 CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN

Nguyễn Xuân Thành, ĐHBKHN

Ở cấp THCS ta đã được làm quen với một định lí rất quen thuộc là tam giác ABC cân nếu có AM vừa là trung tuyến vừa là đường phân giác.Bài toán này vốn dĩ chứng minh không khó tuy nhiên một câu hỏi đặt ra là có bao nhiêu cách để chứng minh bài toán này.Chắc hẵn sẽ có rất nhiều cách chứng minh bài toán này.Khi còn học lớp 12 mình đã mày mò, lục lọi, để tìm ra 20 cách giải cho bài toán trên, tất nhiên các cách giải là khác nhau mặc dù có một số cách đều dựa vào một định lí hoặc một kiến thức nào đó.

- **PHẦN 1**:GIẢI THEO KIẾN THỨC **TRUNG HỌC CƠ SỞ**



Cách 1:

Vì AM là phân giác nên $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$

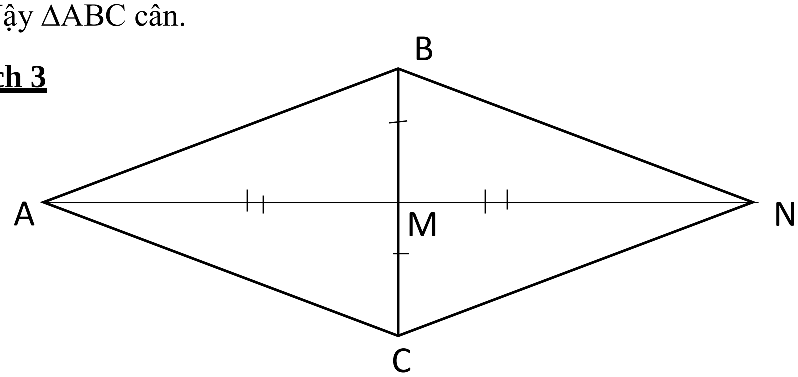
Mặt khác AM cũng là trung tuyến nên MB=MC

Suy ra AB=AC,nghĩa là tam giác ABC cân.

Cách 2:

Kẻ ME⊥ AB và MF⊥AC.Vì AM là phân giác nên theo tính chất đường phân giác ta có ME=MF.Từ đó suy ra ΔMEB=ΔMFC (cạnh huyền-cạnh góc vuông)⇒$\widehat{MBE} = \widehat{MCF}$⇒$\hat{B} = \hat{C}$.Vậy ΔABC cân.

Cách 3

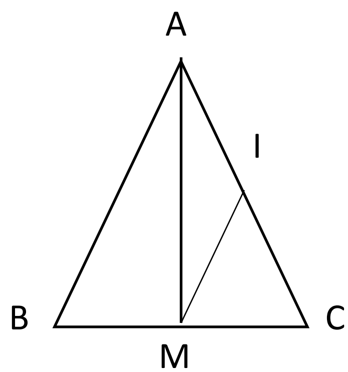


Lấy điểm N thoả mãn M là trung điểm của AN⇒ΔAMC=ΔNMB (c.g.c)⇒AC=BN (1)

Và $\widehat{MAC} = \widehat{MNB}$ mà AM là $phân\ giác$ nên $\widehat{MAC} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MNB}$ ⇒ΔBAN cân tại B nên AB=BN (2)

Từ (1) và (2) ta có AB=AC.Vậy ΔABC cân.

Cách 4:

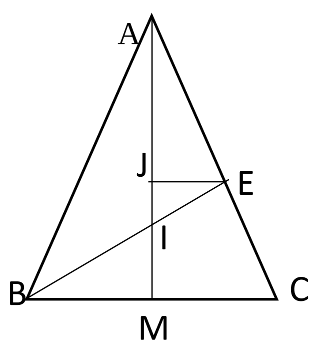


Kẻ MI||AB, Áp dụng định lí Talet ta có $\frac{MI}{AB} = \frac{IC}{AC} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$ ⇒AB=2MI và AC=2AI.(1)

Do MI||AB⇒$\widehat{IMA} = \widehat{MAB} = \widehat{MAI}$ (do AM là phân giác) ⇒ΔIAM cân⇒AI=IM (2)

Từ (1) và (2) ⇒AB=AC.Do đó ΔABC cân.

Cách 5

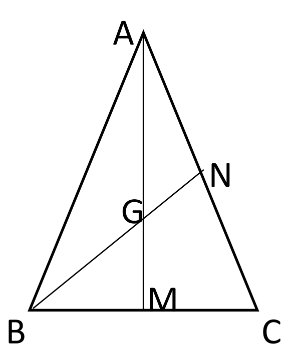


Kẻ phân giác BE và EJ||BC. Gọi I là giao điểm của AM và BE.

Theo định lí Talet và từ giả thiết:

$\frac{AE}{AC} = \frac{JE}{MC} = \frac{JE}{MB} = \frac{IE}{IB} = \frac{AE}{AB}$ ⇒AB=AC. Vì vậy ΔABC là tam giác cân.

Cách 6:



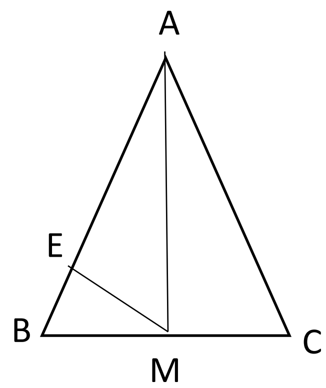
Kẻ trung tuyến BN và gọi G là trọng tâm ΔABC

Thế thì AC=2AN và GB=2GN.

Do AG là phân giác nên $\frac{GB}{GN} = \frac{AB}{AN}$ =2 ⇒AB=2AN.

Do đó AB=AC=2AN. Vậy là ΔABC cân.

Cách 7:



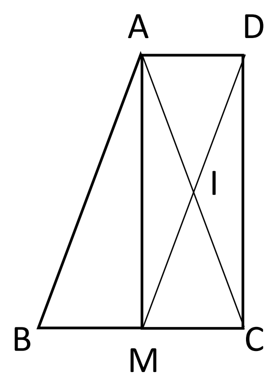
Giả sử AB>AC⇒tồn tại điểm E trên cạnh AB sao cho AE=AC.Dễ dàng nhận thấy ΔAEM=ΔACM (c.g.c)⇒ME=MC.Mà theo giả thiết MB=MC ⇒ME=MB⇒ΔMBE cân tại M.

Nên $\hat{B} = \widehat{MEB} = 180° - \widehat{MEA} = 180° - \widehat{MCA} = 180° - \hat{C} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180°$ ⇒Vô lí.

Vậy AB≤AC.Lập luận tương tự xét với trường hợp AB<AC ta cũng dẫn đến điều vô lí.

Cuối cùng bắt buộc AB=AC hay tam giác ABC là tam giác cân.

Cách 8:



Lấy điểm D thoả mãn AD||MC và AD=MC.(D và B khác phía nhau qua AM).

Vì MC=MB nên AD||MB và AD=MB.

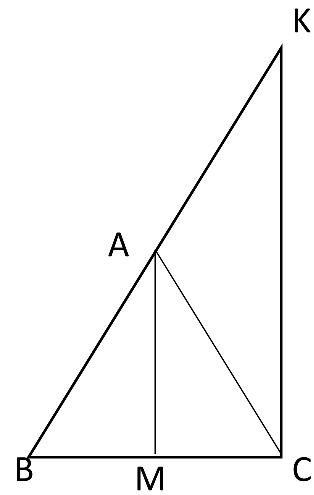
Khi đó ADCM và ADMB đều là hình bình hành nên AB||MD và AM||DC.Từ đó ta có:

$\widehat{BAM} = \widehat{AMD} = \widehat{MDC}$ và $\widehat{CAM} = \widehat{ICD}$ $vì\ AM\ là\ phân\ giác\ nên\ \widehat{CAM} = \widehat{BAM} \Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{ICD}$

Do đó ΔICD cân tại I ⇒ID=IC.Mặt khác: AB=MD=2ID và AC=2IC nên AB=AC.

Vậy tam giác ABC cân.

Cách 9:



Từ C kẻ CK||AM (K∈ AB).Khi đó ta được:

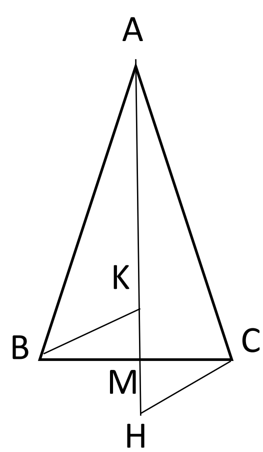
$$\widehat{BAM} = \widehat{AKC}\ , \widehat{MAC} = \widehat{ACK}, do\ AM\ \text{là}\ phân\ giác \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{ACK}$$

Do đó ∆AKC cân tại A ⇒AK=AC (1)

Hơn nữa theo định lí Talet $\frac{BA}{AK} = \frac{BM}{MC}$ mà MB=MC nên BA=AK (2)

Từ (1) và (2) ta có AB=AC,vậy là ∆ABC cân.

Cách 10:



Kẻ BK⊥AM,CH⊥AM.Giả sử H,K cùng phía với nhau qua BC.Xét 2 trường hợp:

TH1:H,K,A cùng phía với nhau qua BC.Khi đó $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \widehat{BAK} + \widehat{ABK} + \widehat{CAK} + \widehat{ACH} > 90° + 90°$ =180° (vì 2 tam giác BKA và ACH là các tam giác vuông).⇒Vô lí vì tổng 3 góc trong tam giác bằng 180°⇒LOẠI.

TH2:H,K và A khác phía nhau qua BC.Lúc này ta lại có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \widehat{BẠK} + \widehat{ABK} + \widehat{HAC} + \widehat{ACH} = 90° + 90° = 180°$⇒Vô lí⇒LOẠI.

Vậy H,K khác phía nhau qua BC như hình vẽ.

Lúc này ΔBKM=ΔCHM (hai tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau và có một cặp góc nhọn bằng nhau)⇒BK=CH.Mặt khác ΔAKB~ΔAHC (g.g.g)⇒$\frac{AB}{AC}=\frac{KB}{CH}=\frac{AK}{AH}=1 \Rightarrow AB = AC$ và $AK = AH \Rightarrow \Delta ABC$ cân và $K \equiv H$.Vậy tam giác ABC cân.

- ❖ Tiếp theo ta chứng minh một công thức mà ta sẽ đặt cho nó là **công thức T:**

  (công thức in đậm)

Nếu lấy D trên tia đối của tia MA thoả mãn $\widehat{MCD}=\frac{\widehat{A}}{2}$ thì **AM.MD=$\frac{BC^2}{4}$ (=MB.MC)**

Thật vậy khi đó ta có $\widehat{BAM} = \widehat{MCD}$

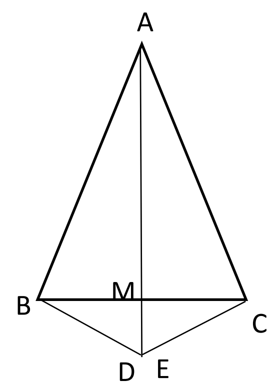
⇒ΔAMB~ΔCMD(g.g.g)

⇒$\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD}$

⇒MA.MD=MB.MC=$\frac{BC^2}{4}$

Như vậy công thức **T** đã được chứng minh.

Công thức này sẽ được sử dụng trong một số cách sau này.



<u>Cách 11:</u>

Lấy D là điểm nằm trên tia đối tia MA thoả mãn $\widehat{MCD} = \frac{\widehat{A}}{2}$

Thế thì theo công thức **T** ⇒MA.MD=MB.MC (1)

Mặt khác gọi E là điểm nằm trên tia đối tia MA thoả mãn $\widehat{MBE} = \frac{\widehat{A}}{2}$

Tương tự như cách chứng minh công thức T ta cũng có được MA.ME=MB.MC (2)

Từ (1) và (2) suy ra D≡E

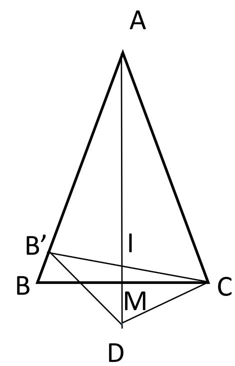
Lúc này ta có được $\widehat{MCD} = \widehat{MBD}$⇒ΔDBC cân⇒$\widehat{MDB} = \widehat{MDC}$

⇒ΔABD=ΔACD(g.c.g)

⇒AB=AC.

Vậy tam giác ABC cân.

Cách 12:



Kẻ CD⊥AC (D∈AM) và DB'⊥AB (B'∈AB).

Do AD là phân giác nên DB'=DC (1)

⇒ΔAB'D=ΔACD(cạnh huyền -cạnh góc vuông).

⇒AB'=AC (2)

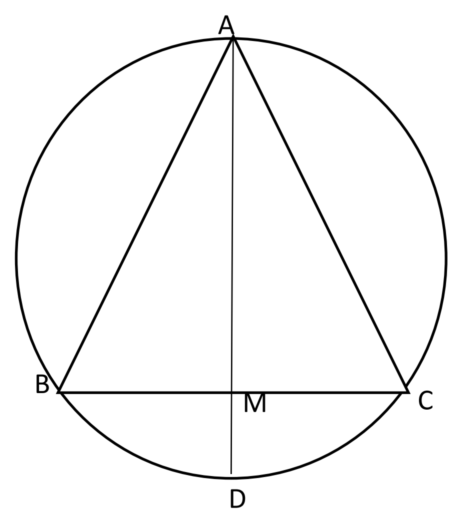
Từ (1) và (2)⇒AD là đường trung trực của tam giác B'C

Gọi I là giao điểm của AD và CB'.Suy ra IB'=IC.Mặt khác MB=MC nên theo định lí Talet đảo thì IM || BB'.Và điều này chỉ xảy ra khi mà I$\equiv M$ và $B \equiv B'$.Thế nên kết hợp với (2) ta có ngay AB=AC suy ra tam giác ABC cân.

Cách 13:

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC.



⇒ cung nhỏ DB=cung nhỏ DC

⇒AD là phân giác của góc BAC

Nghĩa là AD≡AM.

Mặt khác DM⊥BC⇒AM⊥BC

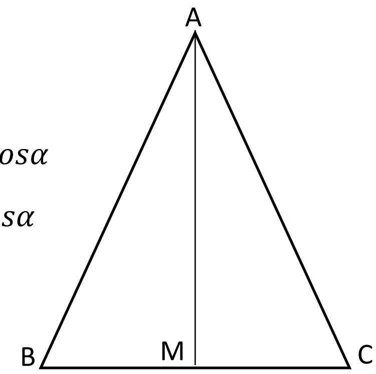
⇒ΔAMB=ΔAMC (c.g.c)

⇒AB=AC

Vậy tam giác ABC cân tại A.

- **PHẦN II**:GIẢI THEO KIẾN THỨC **TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**

Cách 14:



Đặt $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} = \alpha$

Áp dụng định lí cosin:

$$MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2.AB.AM.cos\alpha$$

$$MC^2 = AC^2 + AM^2 - 2AC.AMcos\alpha$$

Trừ vế theo vế 2 đẳng thức trên với chú ý rằng MB=MC

$\Rightarrow AB^2 - AC^2 + 2AC.AMcos\alpha - 2AB.AMcos\alpha = 0$

⇒(AB-AC)(AB+AC-2AM.cosα)=0 (1)

Mà ta luôn có AM.cos$\alpha < AC$ và $AM.cos\alpha < AB$ nên AB+AC-2AM.cosα > 0

Do đó (1) xảy ra khi và chỉ khi AB-AC=0 hay AB=AC.Nghĩa là tam giác ABC cân.

Cách 15:

Đặt $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} = \partial$

Áp dụng định lí sin:

$$\frac{MB}{sin\partial} = \frac{MA}{sinB}$$

$$\frac{MC}{sin\partial} = \frac{MA}{sinC}$$

Thế mà MB=MC nên từ 2 đẳng thức trên suy ra sinB=sinC

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ (1) hoặc $\hat{B} = 180° - \hat{C}$ (2)

Tuy nhiên do $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ nên (2) bị loại.Vậy nên (1) đúng tức là tam giác ABC cân.

Cách 16:

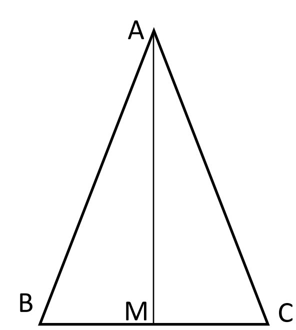
Đặt $\widehat{MAB} = \widehat{MAC} = \partial$

Do MB=MC nên diện tích(dt) ΔABM=dtΔAMC (1)

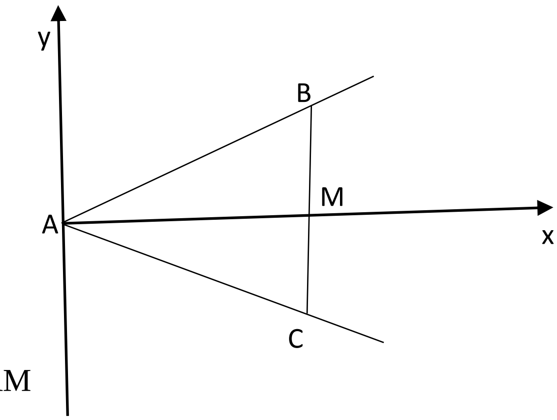
Mà dtΔABM=$\frac{1}{2}.AB.AM.sin\partial$ (2)

Và dtΔACM=$\frac{1}{2}.AC.AM.sin\partial$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra AB=AC.Vậy ΔABC cân.



Cách 17:



Trong cách này sẽ dùng phương pháp gắn trục toạ độ.

Gắn A làm gốc toạ độ

AM làm trục hoành

Trục tung Ay ⊥AM.

Vì AM là phân giác nên AB và AC đối xứng qua AM

⇒Phương trình AB: y=kx

⇒Phương trình AC: y=-kx

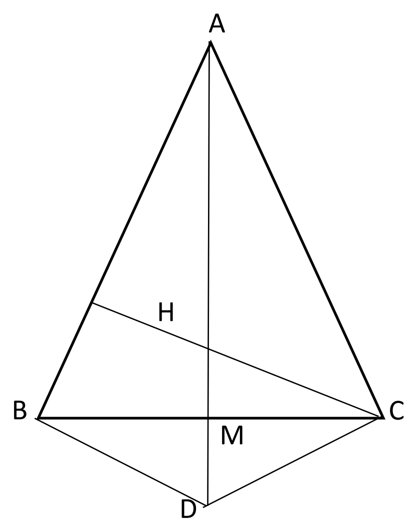
Gọi B(b,kb) và C(c,-kc).Vì M là trung điểm của BC nên tung độ của M là y=(kb-kc)/2.

Mà M thuộc trục hoành nên tung độ =0 ⇒(kb-kc)/2=0 ⇒ b=c ⇒ AB=AC.

Vậy là tam giác ABC cân.

Cách 18:

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.



Trên tia đối của tia MA lấy D thoả mãn $\widehat{MCD} = \frac{\hat{A}}{2}$

Đặt BC=2a, áp dụng công thức **T** ta có

AM.MD=MB.MC=a^2

⇒$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = -a^2$ (1)

Ta có $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH})$

Và $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})$

Có được điều trên là do M là trung điểm của BC

Nhân vế theo vế hai đẳng thức trên ta được và để ý rằng

H là trực tâm của tam giác ABC ta có được:$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} =$

$$= \frac{1}{4}.(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})$$

=$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC})$

=$\frac{1}{4}\{\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC})\}$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2=a^2$ (2)

Cộng hai vế (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH}$=0

⇒$\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH})$=0

⇒$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH}$=0

⇒M là trung điểm của DH suy ra A,H,M,D thẳng hàng

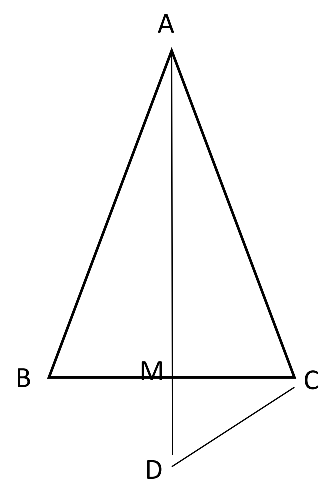
⇒AM là đường cao của tam giác ABC

Nên ΔAMB=ΔAMC(g.c.g)⇒AB=AC.Do đó ΔABC cân.

Cách 19:

Lấy D trên tia đối của tia MA thoả mãn $\widehat{MCD}=\frac{\widehat{A}}{2}$

Theo công thức **T** ta có AM.MD=MB.MC (1)



Xét 2 tam giác AMB và CMD có $\widehat{MAB}=\widehat{MCD},\widehat{AMB}=\widehat{CMD}$

Nên suy ra $\widehat{ABM}=\widehat{ADC}$ ⇒ΔAMB~ΔACD(g.g.g)

⇒$\frac{AB}{AD}=\frac{AM}{AC}$⇒ AM.AD=AB.AC (2)

Lấy (2)-(1) vế theo vế được :

AB.AC-MB.MC=AM.AD-AM.MD=AM^2

Đặt AB=c,AC=b,BC=a thì ta có :bc - $\frac{1}{4}a^2$=AM^2

Nhưng mà theo công thức đường trung tuyến thì:

$$AM^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2$$

Thế nên: bc-$\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2$

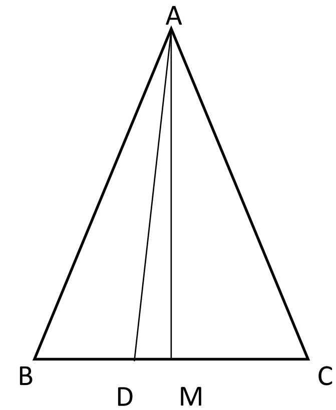
⇒$(b-c)^2=0$⇒b=c

⇒AB=AC.

Vậy tam giác ABC cân.

Cách 20:

Cách cuối cùng này sẽ xét từ bài toán tổng quát để suy ra bài toán trên chỉ là một trường hợp riêng của nó.Xét một tam giác ABC bất kì có trung tuyến AM và phân giác trong AD.Thế thì bài toán ban đầu sẽ là trường hợp riêng khi mà AM≡ AD.



Đặt AB=c,AC=b,BC=a,BD=x,CD=y.⇒x+y=a (1)

Hoàn toàn tương tự như cách 19 ta luôn có :

AD^2 =AB.AC-BD.DC=bc-xy.(3)

Từ tính chất phân giác nên:$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra x=$\frac{ac}{(b+c)}$ và y=$\frac{ab}{(b+c)}$ (5)

Thay vào (3) được AD^2=bc - $\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

AM là trung tuyến nên

$$AM^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$$

Xét hiệu $AM^2 - AD^2 = \frac{1}{4}(b-c)^2 \frac{[2(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$

Như vậy AM vừa là trung tuyến vừa là phân giác là khi AM≡AD⇔ $AM^2 - AD^2 = 0$.(4)

Để ý rằng a,b,c là 3 cạnh của tam giác nên $2(b^2 + c^2) > a^2$ luôn đúng.Nghĩa là (4) xảy ra chỉ khi $(b-c)^2 = 0$ hay b=c .Vậy là tam giác ABC cân.

- Ta có thể làm ngắn gọn hơn bằng cách sau:

Khi mà AM vừa là trung tuyến vừa là phân giác thì AM≡AD⇒DB=DC=$\frac{BC}{2}$

⇒x=y=$\frac{a}{2}$ (6) .Từ (5) (6) giải ra ta cũng đưa về kết quả b=c.Tức là ΔABC cân.

Lời kết: hết rồi !!!!