

50 Bài tập về bất đẳng thức:

Bài 1: Cho $a \geq 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a + \frac{1}{a}$

Giải: $S = a + \frac{1}{a} = \frac{8a}{9} + \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{24}{9} + 2\sqrt{\frac{a}{9} \cdot \frac{1}{a}} = \frac{10}{3}$

Bài 2: Cho $a \geq 2$, tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a + \frac{1}{a^2}$

Giải: $S = a + \frac{1}{a^2} = \frac{6a}{8} + \left(\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) \geq \frac{12}{8} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{8} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} = \frac{12}{8} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

Bài 3: Cho $a, b > 0$ và $a + b \leq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của $S = ab + \frac{1}{ab}$

Giải: $S = ab + \frac{1}{ab} = \left(ab + \frac{1}{16ab}\right) + \frac{15}{16ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{17}{4}$

Bài 4: Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$

Giải:

Cách 1:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{16b^2} + \dots + \frac{1}{16b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{16c^2} + \dots + \frac{1}{16c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{16a^2} + \dots + \frac{1}{16a^2}} \geq \\ &\geq \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16} b^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16} b^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16} b^{32}}}} = \sqrt{17} \left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8 c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8 a^{16}}} \right] \geq \\ &\geq 3\sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{1}{16^8 a^8 b^8 c^8}}} = \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{(2a \cdot 2b \cdot 2c)^8}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Cách 2:

$$S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

$$(1^2 + 4^2)\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \geq \left(1 \cdot a + 4 \cdot \frac{1}{b}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(a + \frac{4}{b}\right)$$

Tương tự

$$\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(b + \frac{4}{c}\right); \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(c + \frac{4}{a}\right)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(a + b + c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(a + b + c + \frac{36}{a+b+c}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}}\left[\left(a + b + c + \frac{9}{4(a+b+c)}\right) + \frac{135}{4(a+b+c)}\right] \geq \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Bài 5: Cho x, y, z là ba số thực dương và $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{z^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{82}$$

Giải:

$$(1.x + 9.\frac{1}{y})^2 \leq (1^2 + 9^2)(x^2 + \frac{1}{y^2}) \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(x + \frac{9}{y})$$

$$TT: \sqrt{y^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(y + \frac{9}{z}); \sqrt{z^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(z + \frac{9}{x})$$

$$S \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(x + y + z + \frac{9}{x} + \frac{9}{y} + \frac{9}{z}) \geq \frac{1}{\sqrt{82}}(x + y + z + \frac{81}{x + y + z})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{82}} \left[(x + y + z + \frac{1}{x + y + z}) + \frac{80}{x + y + z} \right] \geq \sqrt{82}$$

Bài 6: Cho $a, b, c > 0$ và $a + 2b + 3c \geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}$

Giải: Dự đoán $a=2, b=3, c=4$

$$4S = 4a + 4b + 4c + \frac{12}{a} + \frac{18}{b} + \frac{16}{c} = a + 2b + 3c + \left(3a + \frac{12}{a}\right) + \left(2b + \frac{18}{b}\right) + \left(c + \frac{16}{c}\right) \geq$$

$$20 + 3.2.2 + 2.2.3 + 2.4 = 52 \Rightarrow S \geq 13$$

Bài 7: Cho $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}$

Giải:

Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}; \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{y + z} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x + y} + \frac{4}{y + z} \geq \frac{16}{x + 2y + z} \Rightarrow \frac{1}{x + 2y + z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

TT:

$$\frac{1}{2x + y + z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right); \frac{1}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

$$S \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right) = 1$$

Bài 8

Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, ta có $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$

Giải:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2.3^x; \left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2.5^x; \left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2.4^x$$

Cộng các vế tương ứng \Rightarrow đpcm.

Bài 9:

Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng $8^x + 8^y + 8^z \geq 4^{x+1} + 4^{y+1} + 4^{z+1}$

Giải: Dự đoán $x=y=z=2$ và $\sqrt[3]{8^x \cdot 8^x} = \sqrt[3]{64^x} = 4^x$ nên:

$$8^x + 8^x + 8^2 \geq 3\sqrt[3]{8^x \cdot 8^x \cdot 8^2} = 12 \cdot 4^x;$$

$$8^y + 8^y + 8^2 \geq 3\sqrt[3]{8^y \cdot 8^y \cdot 8^2} = 12 \cdot 4^y;$$

$$8^z + 8^z + 8^2 \geq 3\sqrt[3]{8^z \cdot 8^z \cdot 8^2} = 12 \cdot 4^z$$

$$8^x + 8^y + 8^z \geq 3\sqrt[3]{8^x \cdot 8^y \cdot 8^z} = 3\sqrt[3]{8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2} = 192$$

Cộng các kết quả trên => đpcm.

Bài 10:

Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Hãy chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$$

Giải:

$$x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Rightarrow 1+x^3+y^3 \geq xyz + xy(x+y) = xy(x+y+z) \geq 3xy\sqrt[3]{xyz} = 3xy$$

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} = \frac{\sqrt{3xy}}{xy} = \sqrt{\frac{3}{xy}}; \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} = \frac{\sqrt{3yz}}{yz} = \sqrt{\frac{3}{yz}}; \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} = \frac{\sqrt{3zx}}{zx} = \sqrt{\frac{3}{zx}}$$

$$S = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) \geq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^2 y^2 z^2}}} = 3\sqrt{3}$$

Bài 11

Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

Giải:

$$|P| = \left| \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2} \right| \leq \frac{(x+y)(1+xy)}{(1+x)^2(1+y)^2} \leq \frac{\left(\frac{x+y+1+xy}{2}\right)^2}{(x+y+1+xy)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}$$

Khi cho $x=0$ và $y=1$ thì $P = -1/4$

Khi cho $x=1$ và $y=0$ thì $P = 1/4$

KL: Khi dấu = xảy ra.

Bài 12

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$

Giải:

$$\text{Cách 1: } \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} = \frac{a^4}{ab} + \frac{b^4}{bc} + \frac{c^4}{ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{(ab+bc+ac)^2}{ab+bc+ca} = ab+bc+ac$$

$$\text{Cách 2: } \frac{a^3}{b} + ab \geq 2a^2; \frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2; \frac{c^3}{a} + ca \geq 2a^2$$

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - ab - bc - ac \geq ab + bc + ac$$

Bài 13. Cho $x, y > 0$ và $x + y \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2}$

Giải: Dự đoán $x=y=2$

$$A = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2} + y = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right) + \left(\frac{2}{y^2} + \frac{y}{4} + \frac{y}{4}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{9}{2}$$

Bài 14: Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh rằng $P = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy} \geq 4 + 2\sqrt{3}$

Giải: Ta có

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy = 1$$

$$P = \frac{x^3 + y^3 + 3xy}{x^3 + y^3} + \frac{x^3 + y^3 + 3xy}{xy} = 4 + \frac{3xy}{x^3 + y^3} + \frac{x^3 + y^3}{xy} \geq 4 + 2\sqrt{3}$$

Bài 15: Cho $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$. Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{8}$

Giải:

$$\frac{1}{1+x} = 2 - \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+z} = 1 - \frac{1}{1+y} + 1 - \frac{1}{1+z} = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$$

$$TT: \frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{(1+x)(1+z)}}; \frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$$

Nhân các vế của 3 BĐT \Rightarrow đpcm

Bài 16: Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$

$$\text{Giải: } S = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \leq 3 - \frac{9}{x+y+z+3} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Bài 17:

Cho $a, b, c > 1$. Chứng minh rằng: $\frac{4a^2}{a-1} + \frac{5b^2}{b-1} + \frac{3c^2}{c-1} \geq 48$

Giải:

$$\frac{4a^2}{a-1} = \frac{4(a^2-1)+4}{a-1} = 4(a+1) + \frac{4}{a-1} = 4(a-1) + \frac{4}{a-1} + 8 \geq 8 + 8 = 16$$

$$\frac{5b^2}{b-1} = 5(b-1) + \frac{5}{b-1} + 10 \geq 20; \frac{3c^2}{c-1} = 3(c-1) + \frac{3}{c-1} + 6 \geq 12 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 18

Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{c+2a} \right)$$

Giải:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+2b}; \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{b+2c}; \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \geq \frac{9}{c+2a} \text{ cộng ba bất đẳng thức } \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 19

Với $a, b, c > 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq \frac{36}{a+b+c}$$

$$\text{Giải: } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c} = \frac{36}{a+b+c}$$

Bài 20:

Cho $a, b, c, d > 0$ chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

Giải: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{a+b+c}; \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$

Cần nhớ:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Bài 21

Với $a, b, c > 0$ chứng minh rằng: $\frac{4}{a} + \frac{5}{b} + \frac{3}{c} \geq 4 \left(\frac{3}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$

Giải.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{3}{b} \geq \frac{3}{a+b}; \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c} \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \geq \frac{8}{b+c}; \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}$$

Bài 22

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi tam giác đó.

Chứng minh rằng $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Giải:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} &= \frac{2}{-a+b+c} + \frac{2}{a-b+c} + \frac{2}{a+b-c} \\ &= \frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

Bài 23

Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

Giải:

Cách 1: $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

Cách 2:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} &\geq x; \frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq y; \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z \\ \Rightarrow P &\geq x+y+z - \frac{x+y+z}{2} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Bài 24

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng

$$\frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} \geq \frac{51}{7}$$

Giải:

$$\begin{aligned} & \frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} \\ &= \frac{2y+3z+5}{1+x} + 1 + \frac{3z+x+5}{1+2y} + 1 + \frac{x+2y+5}{1+3z} + 1 - 3 \\ &= (x+2y+3z+6) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+3z} \right) - 3 \geq 24 \cdot \frac{9}{x+2y+3z+3} - 3 \\ &= 24 \cdot \frac{9}{21} - 3 = \frac{51}{7} \end{aligned}$$

Bài 25

Chứng minh bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

Giải:

Nhân hai vế với 2, đưa về tổng của ba bình phương.

Bài 26

Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có p là nửa chu vi thì

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$$

Giải:

Bu- nhi -a ta có :

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{(1^2+1^2+1^2)(p-a+p-b+p-c)} = \sqrt{3(3p-2p)} = \sqrt{3p}$$

Bài 27

Cho hai số a, b thỏa mãn : $a \geq 1; b \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $A = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}$

$$\text{Giải: } a + \frac{1}{a} \geq 2; b + \frac{1}{b} = \frac{15b}{16} + \left(\frac{b}{16} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{15 \cdot 4}{16} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{4} \Rightarrow A \geq \frac{21}{4}$$

Bài 28

Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

Giải:

$$\left[(a^2)^2 + (b^2)^2 \right] (1^2 + 1^2) \geq (a^2 + b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2) \geq 2ab(a^2 + b^2) \Rightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

Bài 29

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = \frac{(x+y+1)^2}{xy+y+x} + \frac{xy+y+x}{(x+y+1)^2} \quad (\text{Với } x, y \text{ là các số thực dương}).$$

Giải:

$$\text{Đặt } \frac{(x+y+1)^2}{xy+y+x} = a; a > 0 \Rightarrow A = a + \frac{1}{a} \quad \text{Có}$$

$$A = a + \frac{1}{a} = \frac{8a}{9} + \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a} \right) \geq \frac{8}{9} \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{9} \cdot \frac{1}{a}} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow A \geq \frac{10}{3}$$

Bài 30

Cho ba số thực a,b,c đôi một phân biệt.

$$\text{Chứng minh } \frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$$

Giải:

$$\frac{a}{(b-c)} \cdot \frac{b}{(c-a)} + \frac{b}{(c-a)} \cdot \frac{c}{(a-b)} + \frac{c}{(a-b)} \cdot \frac{a}{(b-c)} = -1$$

$$VT = \left(\frac{a}{(b-c)} + \frac{b}{(c-a)} + \frac{c}{(a-b)} \right)^2 \geq 0$$

(Không cần chỉ ra dấu = xảy ra hoặc nếu cần cho a=1, b=0 => c=-1 thì xảy ra dấu =)

Bài 31

Cho các số dương a; b; c thỏa mãn a + b + c ≤ 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 670$$

Giải:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{2007}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{2007}{(a+b+c)^2} \geq 670 \end{aligned} \quad \text{Bài 32:}$$

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: a + b + c = 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Giải:

$3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$
Mà $a^3 + ab^2 \geq 2a^2b$; $b^3 + bc^2 \geq 2b^2c$; $c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$ Suy ra $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) > 0$
Suy ra $P \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow P \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$
$t = a^2 + b^2 + c^2$, với $t \geq 3$.
Suy ra $P \geq t + \frac{9-t}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{9}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \geq 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow P \geq 4 \quad a = b = c = 1$

Bài 33

Ch x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x+y+z = 1. tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Giải:

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x+y+z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16}$$

$$\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4} \text{ có } \text{khi } y=2x; \frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2} \text{ khi } z=4x; \frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1 \text{ khi } z=2y \Rightarrow P \geq 49/16$$

$$\text{Min } P = 49/16 \text{ với } x = 1/7; y = 2/7; z = 4/7$$

Bài 34

Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} \geq 23$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = 8x + \frac{6}{x} + 18y + \frac{7}{y}$

Giải:

$$B = 8x + \frac{6}{x} + 18y + \frac{7}{y} = \left(8x + \frac{2}{x}\right) + \left(18y + \frac{2}{y}\right) + \left(\frac{4}{x} + \frac{5}{y}\right) \geq 8 + 12 + 23 = 43$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$. Vậy Min B là 43 khi $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

Bài 35

Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn [1;2] và có tổng không vượt quá 5. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Giải:

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \text{ và } x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3x - 2$$

Tương tự $y^2 \leq 3y - 2$ và $z^2 \leq 3z - 2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 3(x + y + z) - 6 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

Bài 36

Cho a, b, c là các số thuộc $[-1; 2]$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Chứng minh rằng $a + b + c \geq 0$.

Giải:

$$(a+1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 \leq 0; b^2 - b - 2 \leq 0; c^2 - c - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq a^2 + b^2 + c^2 - 6 = 0$$

Bài 37

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt{97}}{2}$$

Giải:

$$\left(1 \cdot a + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{b}\right)^2 \leq \left(1^2 + \frac{81}{16}\right) \left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{4}{\sqrt{97}} \left(a + \frac{9}{4b}\right); \text{ cộng các vế lại}$$

$$\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{4}{\sqrt{97}} \left(b + \frac{9}{4c}\right); \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{4}{\sqrt{97}} \left(c + \frac{9}{4a}\right)$$

Bài 38

Cho tam giác có ba cạnh lần lượt là a, b, c và chu vi là 2p. Chứng minh rằng $\frac{p}{p-a} + \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c} \geq 9$

Giải:

$$\frac{p}{p-a} + \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c} \geq 9 \text{ hay } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p-a+p-b+p-c} = \frac{9}{p}$$

Bài 39

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 6. Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc \geq 52$$

Giải:

$$abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (6-2a)(6-2b)(6-2c) \Leftrightarrow abc \geq -24 + \frac{8}{3}(ab+bc+ac)$$

$$\Leftrightarrow 2abc \geq -48 + \frac{16}{3} \left[\frac{36 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \right] \Leftrightarrow \frac{8}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc \geq 48 \quad (1)$$

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq 4 \quad (2) \quad (1) \text{ and } (2) \Rightarrow dpcm$$

Có chứng minh được $3(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc < 18$ hay không?

Bài 40

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Giải:

Có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1), \quad b^2 + c^2 + a^2 \geq bc + ca + ab \quad (2)$

$a^2 + c^2 + b^2 \geq ca + ab + bc \quad (3)$. Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên các vế của (1), (2), (3) đều dương. Nhân vế với vế của (1),

(2), (3) ta có: $abc \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad (*)$

Từ $a+b+c=2$ nên $(*) \Leftrightarrow abc \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \Leftrightarrow 3abc \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (**)$

Ta có $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3abc}{(b+c)(c+a)(a+b)} \quad (***)$

Từ đó $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3abc}{(b+c)(c+a)(a+b)} \geq \frac{3abc}{2^3} = \frac{3abc}{8} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} \geq \frac{1}{4} \quad (***)$

Áp dụng (*) vào (***) cho ta $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3abc}{8} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} \geq \frac{1}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Từ đó giá trị nhỏ nhất của P là 8 đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Bài 41

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{9} \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc < \frac{1}{4}$$

Giải:

* $P = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$

Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \quad (1)$

có $abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (1-2a)(1-2b)(1-2c) =$

$-1 + 4(ab+bc+ca) - 8abc \Leftrightarrow 6abc \geq \frac{-2}{3} + \frac{8}{3}(ab+bc+ca) \quad (2)$

(1) and (2) $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2 + b^2 + c^2 - \frac{2}{3} + \frac{5}{3}(ab+bc+ca)$

mà $ab+bc+ca = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{6}$

$\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow P \geq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$

$$*P = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$$

$$abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (1-2a)(1-2b)(1-2c) = -1 + 4(ab+bc+ca) - 8abc > 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca - 2abc > \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P &= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) + 6abc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac + 6abc = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) + 6abc \\ &= 1 - 3(ab+bc+ca - 2abc) < 1 - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Bài 42

Cho ba số dương, x, y, z thỏa mãn $x+y+z=6$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx + xyz \geq 8$$

Giải:

Chứng minh được

$$\begin{aligned} xyz &\geq (-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \\ &= (6-2x)(6-2y)(6-2z) = 216 - 72(x+y+z) + 24(xy+yz+zx) - 8xyz \\ \Leftrightarrow xyz &\geq -24 + \frac{8}{3}(xy+yz+zx) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{mà } (x+y+z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 36 - 3xy - 3yz - 3zx \quad (2)$$

Bài 43

$$\text{Nên } xyz + x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq -24 + \frac{8}{3}(xy+yz+zx) + 36 - 3xy - 3yz - 3zx$$

$$\Leftrightarrow xyz + x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 12 - \frac{1}{3}(xy+yz+zx) \text{ mà } (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow xyz + x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{(x+y+z)^2}{3} = 12 - \frac{36}{9} = 8$$

Cho $a \geq 1342; b \geq 1342$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + ab \geq 2013(a+b)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:

Ta sẽ sử dụng ba kết quả sau:

$$(a-1342)^2 + (b-1342)^2 \geq 0; (a-1342)(b-1342) \geq 0; a-1342 + b-1342 \geq 0$$

Thật vậy:

$$(a-1342)^2 + (b-1342)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2.1342.(a+b) + 2.1342^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$(a-1342)(b-1342) \geq 0 \Leftrightarrow ab - 1342a - 1342b + 1342^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2.1342.(a+b) + 2.1342^2 + ab - 1342a - 1342b + 1342^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab \geq 3.1342.(a+b) - 3.1342^2 = 2.2013.(a+b) - 3.1342^2$$

$$= 2013.(a+b) + 2013.(a+b) - 2.2013.1342 = 2013.(a+b) + 2013.(a+b-1342-1342) \geq 2013.(a+b)$$

Bài V. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2(x-3)^2$$

Đặt $a = x - 2$

$$\Rightarrow x - 1 = a + 1; x - 3 = a - 1$$

$$A = (a+1)^4 + (a-1)^4 + 6(a+1)^2(a-1)^2$$

$$A = (a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1) + (a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1) + 6(a^2 - 1)^2$$

$$A = 8a^4 + 8 \geq 8$$

$$\Rightarrow \text{Min } A = 8 \Leftrightarrow a^4 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 8 khi $x = 2$

6

Cách 2 :

$$A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2(x-3)^2$$

$$A = \left[(x-1)^2 + (x-3)^2 \right]^2 + 4(x-1)^2(x-3)^2$$

$$A = \left[2x^2 - 8x + 10 \right]^2 + 4(x^2 - 4x + 3)^2$$

$$A = \left[2(x-2)^2 + 2 \right]^2 + 4((x-2)^2 - 1)^2$$

$$A = 4(x-2)^4 + 8(x-2)^2 + 4 + 4(x-2)^4 - 8(x-2)^2 + 4$$

$$A = 8(x-2)^4 + 8 \geq 8$$

Bài 45:

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \leq \frac{1}{4}$$

Giải:

$$\frac{ab}{c+1} = \frac{ab}{(c+a)+(c+b)} \leq \frac{ab}{4} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right);$$

Tương tự ta có:

$$\frac{bc}{a+1} \leq \frac{bc}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right);$$

$$\frac{ca}{b+1} \leq \frac{ca}{4} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right).$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab+bc}{c+a} + \frac{ab+ca}{b+c} + \frac{bc+ca}{a+b} \right) = \frac{1}{4} (a+b+c) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \leq \frac{1}{4}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Bài 46

Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^3+y^3} + \frac{1}{1+y^3+z^3} + \frac{1}{1+z^3+x^3} \leq 1$$

Giải:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow (x+y)(x^2 + y^2) \geq 2xy(x+y) \Rightarrow x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$$

$$\Rightarrow 1+x^3 + y^3 \geq xy(x+y+z) \Rightarrow \frac{1}{1+x^3 + y^3} \leq \frac{1}{xy(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^3 + y^3} \leq \frac{z}{x+y+z}; \frac{1}{1+y^3 + z^3} \leq \frac{x}{x+y+z}; \frac{1}{1+z^3 + x^3} \leq \frac{y}{x+y+z} \Rightarrow dpcm$$

Bài 47

Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$(a+b)^2 + \frac{a+b}{2} \geq 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}$$

Giải:

$$(a+b)^2 + \frac{a+b}{2} = (a+b)\left(a+b + \frac{1}{2}\right) = (a+b)\left(\left(a + \frac{1}{4}\right) + \left(b + \frac{1}{4}\right)\right) \geq 2\sqrt{ab}(a+b) = 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}$$

Bài 48

Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \geq 1$$

Giải:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} = \frac{1}{\sqrt{(2a+1)(4a^2 - 2a + 1)}} \geq \frac{1}{\frac{2a+1+4a^2 - 2a + 1}{2}} = \frac{2}{4a^2 + 2} = \frac{1}{2a^2 + 1}$$

$$; \frac{1}{\sqrt{1+8b^3}} \geq \frac{1}{2b^2 + 1}; \frac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \geq \frac{1}{2c^2 + 1}$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{1}{2a^2 + 1} + \frac{1}{2b^2 + 1} + \frac{1}{2c^2 + 1} \geq \frac{9}{2a^2 + 1 + 2b^2 + 1 + 2c^2 + 1} = 1$$

Bài 49

Với a,b,c là ba số thực dương . Chứng minh rằng : $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$

Giải:

Cách 1:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} = \frac{a^4}{ab} + \frac{b^4}{bc} + \frac{c^4}{ca} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{ab + bc + ca} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Cách 2

$$\frac{a^3}{b} + ab \geq 2a^2; \frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2; \frac{c^3}{a} + ca \geq 2c^2 \Rightarrow VT \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{z+1} + \frac{z^2}{x+1} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Giải: } \frac{x^2}{y+1} + \frac{y+1}{4} \geq x; \frac{y^2}{z+1} + \frac{z+1}{4} \geq y; \frac{z^2}{x+1} + \frac{x+1}{4} \geq z \Rightarrow VT \geq \frac{3}{4}(x+y+z) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.3 - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$