♦ Bài 1: QUAN HỆ GIỮA ĐẠO HÀM VÀ SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu của hàm số:

a. Định nghĩa:

+ Hàm số $f(x)$ được gọi là đồng biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

+ Hàm số $f(x)$ được gọi là nghịch biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

b. Định lý:

+ Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên khoảng (a;b) $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$.

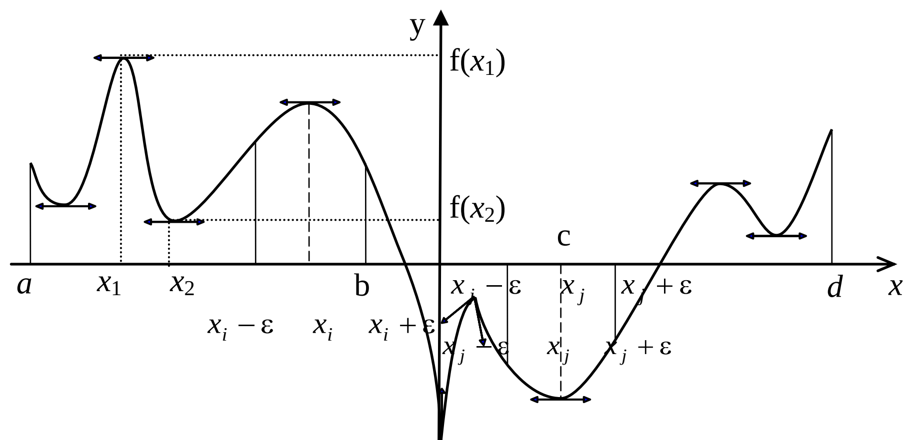
+ Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng (a;b) $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$.

2. Cực trị của hàm số:

+ Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 nếu $y'(x_0) = 0$.

+ Hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 nếu đạo hàm y' đổi dấu từ + sang – khi đi qua x_0.

+ Hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 nếu đạo hàm y' đổi dấu từ – sang + khi đi qua x_0.



- **Định lý .** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp một trên khoảng (a; b) chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và $f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

+ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

+ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

+ Nếu $f''(x_0) = 0$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

• Bài 1: Xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số $y = f(x)$.

a. Qui tắc 1: + B_1: Tìm tập xác định (giả sử D = R, $a < 0$)

+ B_2: Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$

+ B_3: Lập bảng biến thiên và kết luận

b. Qui tắc 2: + Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.(x_i là nghiệm pt $f'(x)$)

+ Nếu $f''(x) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

+ Nếu $f''(x) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

+ Nếu $f''(x) = 0$ thì hàm số không có cực trị.

BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$		↗	CĐ	↘	CT	↗	CĐ	↘	

∇ **Chú ý:** Cách xét dấu của phương trình.

+ Ta xét dấu từ phải sang trái, bên phải cùng dấu với hệ số a (nếu phương trình tích, thương thì cùng dấu tích các hệ số a) qua nghiệm đơn đổi dấu, qua nghiệm kép không đổi dấu.

* **Ví dụ 1:** Xét tính đồng biến, nghịch biến và cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ b) $y = -\dfrac{x^4}{2} + x^2 + \dfrac{3}{2}$ c) $y = \dfrac{2x-1}{x+5}$ d) $y = \dfrac{2x^2 + x + 26}{x+2}$

e) $y=\sqrt{2x-1}-\sqrt{3-x}$ f) $y=x\sqrt{2-x^2}$ g) $y=(x-2)^3(x+1)^4$ h) $y=x+\sqrt{2x-x^2}$

∗ **Ví dụ 2:** Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\sin 2x-x$ b) $y=x-2\sin^2 x$ c) $y=\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x, x\in[0;\pi]$.

• **Bài 2: Xác định tham số để hàm số y = *f(x)* đồng biến (nghịch biến)**

a. Tìm m để hàm số *f(x)* đồng biến (nghịch biến) trên tập xác định

B_1: Tìm tập xác định D

B_2: Tính $f'(x)$

+ Hàm số *f(x)* đồng biến trên D khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0\ \forall x\in D$

+ Hàm số *f(x)* nghịch biến trên D khi và chỉ khi $f'(x)\le 0\ \forall x\in D$

▹ **Chú ý.** $+ax^2+bx+c\ge 0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$ $+\ ax^2+bx+c\le 0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$

+ Nếu *a* chứa tham số phải xét trường hợp *a* = 0

b. Tìm m để hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến (nghịch biến) trên (α, β)

B_1: Tìm tập xác định D B_2: Tính $f'(x)$

Cách 1: Nếu tham số m có mũ bậc nhất.

+ Hàm số *f(x)* đồng biến trên (α; β) ⇔ $f'(x)\ge 0$ ∀x ∈ (α; β) ⇔ $m\ge g(x)\Leftrightarrow m\ge \mathrm{Max}\, g(x)$

+ Hàm số *f(x)* nghịch biến trên (α; β) ⇔ $f'(x)\le 0$ ∀x ∈ (α; β) ⇔ $m\le g(x)\Leftrightarrow m\le \min g(x)$

Cách 2: Nếu tham số m có mũ bậc hai và phương trình f '(x) có Δ = $(km+h)^2$

→ f '(x) có hai nghiệm x_1 , x_2 với $x_1 < x_2$

+ *f(x)* đồng biến (α; β) ⇔ $\left\langle\begin{array}{l} a>0\rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1>\beta\\ x_2<\alpha\end{array}\right.\\ a<0\rightarrow x_1<\alpha<\beta<x_2\end{array}\right.$ nghịch biến (α; β) ⇔ $\left\langle\begin{array}{l} a<0\rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1>\beta\\ x_2<\alpha\end{array}\right.\\ a>0\rightarrow x_1<\alpha<\beta<x_2\end{array}\right.$

+ *f(x)* đồng biến (-∞; α) ⇔ *a* > 0, x_1 > α, nghịch biến (-∞; α) ⇔ a < 0, x_1 > α,

+ f(x) đồng biến (α; +∞) ⇔ *a* > 0, x_2 < α, nghịch biến (α; +∞) ⇔ a < 0, x_2 < α,

c. Hàm số y = $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có TXĐ: D = $R\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

+ Hàm số *f(x)* đồng biến (-∞; α) ⇔ $\begin{cases}ad-bc>0\\ -d/c\ge\alpha\end{cases}$, *f(x)* nghịch biến (-∞; α) ⇔ $\begin{cases}ad-bc<0\\ -d/c\ge\alpha\end{cases}$

+ Hàm số *f(x)* đồng biến (α; +∞) ⇔ $\begin{cases}ad-bc>0\\ -d/c\le\alpha\end{cases}$, *f(x)* nghịch biến (α; +∞) ⇔ $\begin{cases}ad-bc<0\\ -d/c\le\alpha\end{cases}$

1) Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên R. ĐS: $-2\le m\le 2$

2) Với giá trị nào của m hàm số: $y=\frac{1}{3}(m^2+m-6)x^3+(m-2)x^2-3x+4$ luôn nghịch biến trên R.

ĐS: - 7/4 ≤ m ≤ 2

3)(KA -13) Tìm m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx-1$ (1) nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ ĐS: m ≤ -1

4) Tìm *m* để hàm số $y=\frac{-1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-4$ đồng biến trên (0, 3) ĐS: $m\ge\frac{12}{7}$

5) Cho hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x-\frac{m^3}{3}$ (C). Tìm m để hàm số (C).

a, đồng biến [0; 2] b. đồng biến (1; +∞) ĐS: a. m ≥ 3 ∨ m ≤ - 1, b. m ≤ 0

6) Tìm m để hàm số: y $=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ ĐS: $-2<m\le -1$

• **Bài 3: Ứng dụng tính đơn điệu chứng minh đẳng thức** $u(x)\ge v(x)$

+ Đặt: $f(x)=u(x)-v(x)$
+ Tính $f'(x)$ và chứng minh $f'(x)>0$ hoặc $f'(x)<0$
+ Nếu $f'(x)>0$ suy ra $f(x)$ đồng biến với mọi $x\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge f(0) \Leftrightarrow u(x)-v(x)\ge 0$

Chứng minh các đẳng thức sau:

a, $\sin x > x-\dfrac{x^3}{6},\ \forall x>0$ **b,** $x<\tan x,\ khi\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$ **c,** $\tan x > x+\dfrac{x^3}{3},\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

d, $2\sin x+\tan x>3x,\ x\in(0;\dfrac{\pi}{2})$ **e,** $1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\dfrac{1}{2}x$ với $(0<x<+\infty)$

• **Bài 4: Các bài toán cực trị hàm số**

a. Xác định tham số để hàm số đạt cực trị tại *x = a*.

+ Hàm số *y = f(x)* đạt cực đại tại *x = a* $\Leftrightarrow f'(a)=0$ và chứng minh $f''(a)<0$

+ Hàm số *y = f(x)* đạt cực tiểu tại *x = a* $\Leftrightarrow f'(a)=0$ và chứng minh $f''(a)>0$

+ Hàm số *y = f(x)* đạt cực trị tại x_0 , y_0 $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f(x_0)=y_0 \end{cases}$ và chứng minh $f''(x_0)\ne 0$

b. Xác định tham số để hàm số có cực trị

∗ Với hàm số bậc ba đạo hàm là một tam thức bậc hai : $f'(x) = Ax^2 + Bx + C$, ($A \ne 0$).

+ Hàm số *f(x)* đạt một cực đại và một cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow A\ne 0,\ \Delta>0$

+ Hàm số *f(x)* không có cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\le 0$

∗ Với hàm số trùng phương, ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2ax^2+b=0\ \ (1) \end{array}\right.$

+ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}>0$

Khi đó hàm số có hai cực tiểu, một cực đại khi $a > 0$; có hai cực đại, một cực tiểu khi $a < 0$.

+ Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x = 0$ $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}\le 0$

▷ **Chú ý:**

+ Nếu không tìm được hai điểm cực trị ta qui về tổng hai nghiệm và tích hai nghiệm.
+ Để tìm cực trị của hàm số đa thức *y = f(x)* ta lấy y chia cho y' và viết hàm số dưới dạng: $y = y'.h(x) + g(x)$. Khi đó, nếu x_0 là điểm cực trị thì $y_0 = g(x_0)$

1) Tìm m để hàm số: $y=x^3-(m-1)x^2+3(m^2-4)x+m+1$ đạt cực đại tại $x = 0$. (Đ/S: $m=2$)

2) Xác định b, c để hàm số: $y = \dfrac{1}{2}x^4 + 2bx^2 + c$ đạt cực trị tại $x = -1$, $y = \dfrac{1}{2}$ (Đ/S: b = $-\dfrac{1}{2}$, c = 1)

3) Tìm các hệ số a, b, c, d của hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, f(0) = 0 và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, f(1) = 1. (Đ/S: a = - 2, b = 3, c = d = 0)

4) Tìm m để hàm số: $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$ có cực đại, cực tiểu. (Đ/S: $m\ne -2, -3<m<1$)

5) Định m để hàm số: $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 điểm cực trị (Đ/S: m < - 3 ∨ 0 < m < 3)

6) Tìm m để hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ có hai cực trị hoành độ dương. (Đ/S: m > 2)

7)(KB-14) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1), Cho điểm A(2; 3). Tìm m để đồ thị (1) có hai cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A. ĐS: m = 1/2

8)(K_B-12) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 48. ĐS: m ≠ 0, m = ± 2

9)(K_A-12) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1) ,với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. ĐS: m > -1, m = 0

10)(KB-13)Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = *x* + 2. ĐS: m = 0, m = 2.

⁕ Bài tập tương tự

Bài 1: Xét tính đồng biến, nghịch biến và cực trị của các hàm số sau:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$ **2)** $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **3)** $y = \frac{x^2 + 8x - 24}{x^2 - 4}$ **4)** $y = x + 3 + 2\sqrt{2 - x}$

Bài 2: Xác định tham số để hàm số đồng biến, nghịch biến

1) Tìm m để hàm số: y $= \frac{m}{3}x^3 - 2x^2 + (m+3)x + m$ đồng biến trên R ĐS: $m \geq 1$

2) Tìm m để hàm số: y = $\frac{2x + m}{mx + 1}$ nghịch biến trên tập xác định của nó. ĐS: m < -$\sqrt{2}$ v m > $\sqrt{2}$

3) Tìm *m* để $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên $[2, +\infty)$ ĐS: $m \geq \frac{2}{3}$

4) Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + x + 1$ nghịch biến trên khoảng (1; 2). ĐS: $m \geq 13/4$

5) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm *m* để hàm số

a. đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ b. nghịch biến trên (1; $\frac{3}{2}$) ĐS: a. m ≤ 1 b. $\frac{1}{2}$ < m < 1

6) Tìm m để hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + m}$ đồng biến trên (2; +∞) ĐS: - 2 ≤ m < -1 v m > 1

Bài 3: Cực trị hàm số

1) Tìm m để hàm số: $y = x^3 - (m+3)x^2 + mx + m + 5$ đạt cực tiểu tại *x* = 2. Đ/S: $m = 0$

2) Tìm m để hàm số: $y = -mx^4 + 2(m-2)x^2 + m - 5$ đạt cực đại tại $x = \frac{1}{2}$. ĐS: $m = \frac{8}{3}$

3) Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số y = x^3 + ax^2 + bx + c đạt cực trị bằng 0 tại điểm *x* = - 2 và đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1; 0). Đ/S: *a* = 3, b = 0, c = - 4

4) Tìm m để hàm số: $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ không có cực trị. Đ/S: $0 \leq m \leq 1/4$

5) Tìm *m* để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $|x_1 - x_2| \geq 8$.

$$\text{ĐS: } m \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{65}}{2}, +\infty\right)$$

6) Tìm *m* để hàm số: $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu lập thành tam giác đều. ĐS: m = $\sqrt[3]{3}$

7) Tìm m để hàm số: $y = 2mx^4 - x^2 - 4m + 1$ có 2 điểm cực tiểu, một cực đại và khoảng cách giữa chúng bằng 5. ĐS: m = 1/25

8) Tìm m để hàm số y = x^4 – 2mx^2 + 2m + m^4 có 3 cực trị A, B, C sao cho $S_{\Delta ABC} = \sqrt{6}$ ĐS: m = $\sqrt[5]{6}$

9)(K_D- 12) Cho hàm số y = $\frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ ĐS:m < $\frac{-2}{\sqrt{13}}$ V m > $\frac{2}{\sqrt{13}}$, m = $\frac{2}{3}$

10)(K_B-11) Cho h/s $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1). Tìm m để đồ (1) có ba điểm cực trị A,B,C sao cho OA = BC, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại. ĐS:m > -1,m = $2 \pm 2\sqrt{2}$

⧫ Bài 2: Ứng dụng đạo hàm tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Giả sử hàm số *f(x)* có tập xác định D (D ⊂ R)

+ $M = \max\limits_{D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$ + $m = \min\limits_{D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$

a. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng ta sử dụng phương pháp.

- Tính f ′(*x*).
- Xét dấu f ′(*x*) và lập bảng biến thiên.
- Dựa và bảng biến thiên ta có Max*f(x)* = CĐ, min*f(x)* = CT

b. Tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên đoạn [a; b] ta sử dụng phương pháp.

- Tính f ′(*x*).
- Giải phương trình f ′(*x*) = 0 tìm các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ treân [*a*; b] (nếu có).
- Tính f(*a*), f(b), f(x_1), f(x_2), …, f(x_n).
- So sánh các giá trị vừa tính và kết luận: $\underset{[a;b]}{Max} f(x) = M, \quad \min\limits_{[a;b]} f(x) = m$

∗ Ví dụ 1: Tìm giá trị LN, NN của các hàm số sau

1) $y = \frac{4}{1+x^2}$ **2)** $y = x + \frac{4}{x}$ trên (0; +∞) **3)** $y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$ **4)** $y = \frac{1}{\cos x}$ trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

ĐS: **1.** max y = 4 **2.** min y = 4 **3.** min y = $5/2$, max y = 7 **4.** max y = -1

∗ Ví dụ: Tìm giá trị LN, NN của các hàm số sau

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên [–1; 5] **2)** y = $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 9x$. trên [-2; 2]

3) $y = |x^2 - 5x + 6|$ trên [- 5; 5] **4)** $y = \sqrt{25 - x^2}$ trên [- 4; 4] **5)** $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x}$

6) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ **7)** $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ **8)** y = x + $\cos^2$x trên [0; $\frac{\pi}{4}$]

ĐS: 1. Max y =266, min y = -6 **2.** Max y = 14, min y = - 7 **3.** Max y = 56, min y = 0

4. max y = 5, min y = 3 **5.** Max y = $2\sqrt{3}$, min y = $\sqrt{6}$ **6.** Max y = $2\sqrt{2}$, min y = - 2

7. max y = $2\sqrt{2}$, min y = $\sqrt{2}$ **8.** Max y = $\pi/4 + 1/2$, min y = 1

⁕ Bài tập tương tự

1) y = $x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ Trên đoạn [-4; 4] **2)** $y = x^2 + \frac{2}{x}$ $(x > 0)$ **3)** $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x+2}$ trên [0; 1]

4) y $= x + \sqrt{4 - x^2}$ **5)** $y = x\sqrt{1 - x^2}$ **6)** $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

7) $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 2}$ **8)** $y = \frac{1}{\cos^2 x + \cos x + 1}$ **9)** $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x$, trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

10) Tìm tham số *m* để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x+1}$ trên đoạn [0;1] bằng -2

11) Cho hàm số $y=\dfrac{k\cos x+1}{\cos x+2}$. Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -1.

ĐS: 1. maxy = 40, miny = - 41 **2.** miny = 3 **3.** maxy = $\dfrac{11}{3}$, miny = 2 **4.** maxy = $2\sqrt{2}$,miny = -2

5. maxy = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, miny =-$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **6.** miny = 5 **7.** maxy = $\dfrac{1}{3}$, miny = - 3 **8.** maxy = $\dfrac{7}{4}$, miny = $\dfrac{1}{3}$

9. maxy = $\dfrac{\pi}{4}+1$, miny = $-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **10.** m = -1, m = 2 **11.** k = - 4 hoặc k = 2

♦ Bài 3 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

- Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thõa mãn:

  $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$;

- Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$

- Đường thẳng $y=ax+b,\ a\neq 0$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** của đồ thị hàm số $y=f(x)$

  nếu : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

2. Chú ý:

a) Nếu $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỉ ta có .

- Nếu Q(x) = 0 có nghiệm x_0 thì hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=x_0$.
- Nếu bậc P(x) ≤ bậc Q(x) thì hàm số có tiệm cận ngang.
- Nếu bậc (P(x)) = bậc (Q(x)) + 1 thì hàm số có tiệm cận xiên.

b) Nếu $y=\sqrt{f(x)}$ ta tìm tiệm cận bằng cách xác định hệ số *a*, b trong phương trình của tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng các công thức sau:

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$ hoặc $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

1) Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang các hàm số sau;

a) $y=\dfrac{2x-5}{x-1}$ b) $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2-1}$ c) $y=\dfrac{2x^2+3x+3}{x^2+x+1}$ d) $y=\dfrac{x}{x^2-4x+5}$ e) $y=\dfrac{x}{x^3+1}$

2) Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$. Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị qua điểm A(-1; √2) ĐS: m = 2

3) Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x+m}{mx-1}$. Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8. ĐS: m = $\pm\dfrac{1}{2}$

4) Tìm các đường tiệm cận xiên của các hàm số sau:

a. $y=\dfrac{7x^2+4x+5}{2-3x}$ b. $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$ c. $y=\dfrac{x^4-x+4}{x^3-1}$ d. $y=2x+\sqrt{x^2-1}$ e. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}$

⁕ Bài tập tương tự

1) Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của các hàm số sau:

a. $y=\dfrac{10x+3}{1-2x}$ b. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$ c. $y=\dfrac{2+x}{9-x^2}$ d. $y=\dfrac{7x^2+3x+4}{x^3+2x^2-x-2}$

2) Tìm tiệm cận xiên của các hàm số sau:

a. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$ b. $y=\sqrt{x^2-4x}$ c. $y=\dfrac{4x+2}{\sqrt{x^2-9}}$ d. $y=x+\sqrt{x^2-3x+10}$

⧫ Bài 4: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đa thức

B_1: Tập xác định D = R

B_2: Xét sự biến thiên của hàm số.

a) Tìm giới hạn tại vô cực của hàm số.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm:

+ Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm nghiệm $f'(x) = 0$, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

B_3: Vẽ đồ thị của hàm số

+ Tìm điểm uốn $I(x_0; y_0)$ là nghiệm phương trình $f''(x) = 0$ (chỉ áp dụng hàm số bậc ba)

+ Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị và vẽ hình.

+ Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục và tâm đối xứng của đồ thị (nếu có)

▷ **Chú ý:** Biện luận phương trình $f(x) - m = 0$ bằng đồ thị

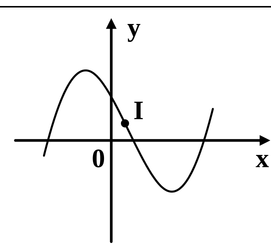
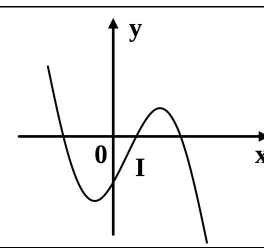
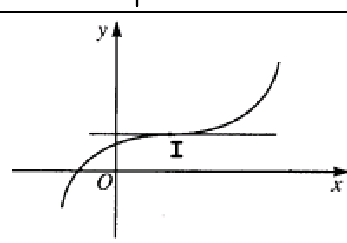
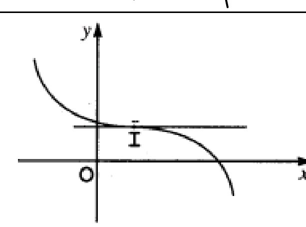
+ Ta biến đổi phương trình về dạng $f(x) = m$ (*).

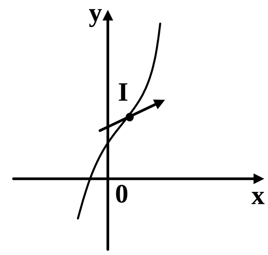
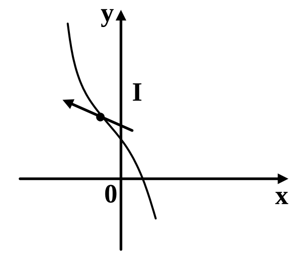
+ Nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

1. Hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$:

• Hàm số nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

• Các dạng đồ thị hàm số:

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$		
$y' = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac = 0$		

y' = 0 vô nghiệm ⇔ Δ' = $b^2 - 3ac < 0$		

1) Cho hàm số: y = $x^3 - 3x^2$ (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Dựa vào đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x^2 + m - 2 = 0$.

2) Cho hàm số y = $-x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ (C).

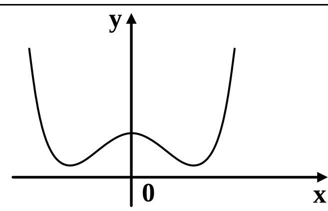
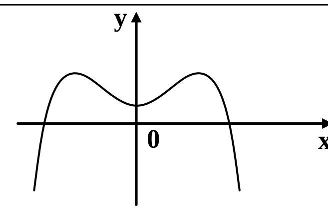
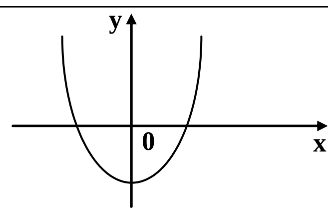
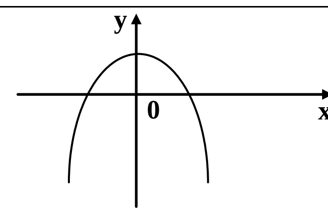
a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Dựa vào đồ thị (C) tìm m để phương trình: $x^3 - 6x^2 + 9x + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

3) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) y = $-x^3 - x + 2$.

2. Hàm số trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$ **:**

- Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Các dạng đồ thị hàm số:

	***a* > 0**	***a* < 0**
y' = 0 có 3 nghiệm phân biệt ⇔ $ab < 0$		
y' = 0 có 1 nghiệm ⇔ $ab > 0$		

1) Cho hàm số (C): y = $x^4 - 6x^2 + 5$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm phương trình: $-x^4 + 6x^2 + 3 + m = 0$.

2) Cho hàm số (C): y = $-x^4 + 2x^2 - 2$.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Dựa vào đồ thị (C), tìm m để phương trình $-x^4 + 2x^2 - m^2 - 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

3) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = $-\frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{3}{2}$

Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm phân thức hữu tỉ

Hàm số nhất biến: $y = \frac{ax+b}{cx+d} \ (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

B_1: Tập xác định D = $R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

B_2: Xét sự biến thiên của hàm số.

+ Xét tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số.

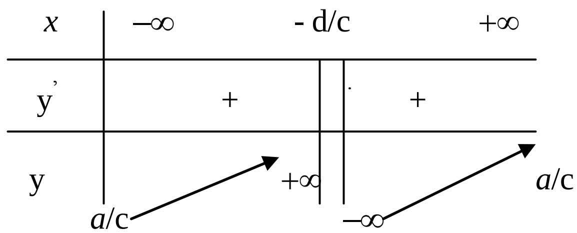
$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x)=+\infty\ (-\infty),\quad \lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x)=-\infty\ (+\infty)\ \to\ x=-\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng hàm số

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{a}{c}\quad\to\ y=\dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang hàm số

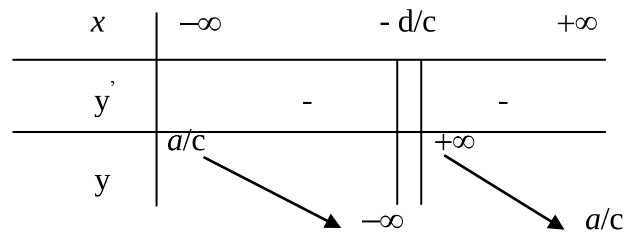
+ Lập bảng biến thiên của hàm số, ta có : $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$,

nếu $ad-bc>0$ thì hàm số đồng biến trên D, nếu $ad-bc<0$ thì hàm số nghịch biến trên D.

$y'>0$ ta có BBT



$y'<0$ ta có BBT

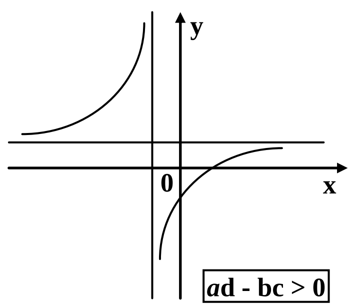


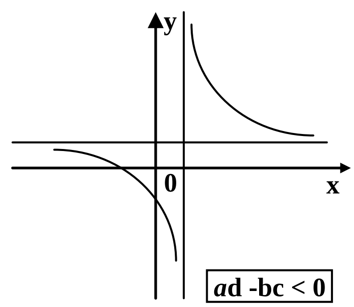
B$_3$: Vẽ đồ thị của hàm số

+ Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị (giao điểm 0x, giao điểm 0y) và vẽ hình.

+ Đồ thị nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

- Các dạng đồ thị





Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của các hàm số sau: a, $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ b, $y=\dfrac{x+3}{x+2}$

PP VẼ HÀM SỐ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ **:** Ta có $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & khi\ f(x)\ge 0\\ -f(x) & khi\ f(x)<0\end{cases}$

2. Đồ thị hàm số $y=f(|x|)$: Ta có $f(|x|)=\begin{cases} f(x) & khi\ x\ge 0\\ f(-x) & khi\ x<0\end{cases}$

$y=f(x)$ có đồ thị (C)	$y=\|f(x)\|$ có đồ thị (C')	$y=f(\|x\|)$ có đồ thị (C'')
	$y=\|f(x)\|\ge 0,\ \forall x\in D$. Do đó ta phải giữ nguyên phần phía trên trục Ox và lấy đối xứng phần phía dưới trục Ox lên trên ta được đồ thị (C').	$y=f(\|x\|)$ có $f(\|-x\|)=f(\|x\|)$, $\forall x\in D$ nên đây là hàm số chẵn do đó có đồ thị đối xứng qua trục tung Oy.

▷ **Chú ý:**

+ Phương trình $f(|x|)-m=0$ hoặc $|f(x)|-m=0$, nghiệm phương trình là giao giữa hàm số $y=|f(x)|$ hoặc $y=f(|x|)$ và đường thẳng y = m

+ Vẽ đồ thị $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$ và tìm tham số m.

1) Cho hàm số (C): $y=2x^3-9x^2+12x-4$.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Tìm m để phương trình : $2|x|^3-9x^2+12|x|=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

2) Cho hàm số (C): $y=-x^4+8x^2-10$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Tìm m để phương trình: $|-x^4+8x^2-10|=m$ có 8 nghiệm phân biệt

3) Cho hàm số (C): $y=\dfrac{-x-1}{x-1}$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

a, Từ đồ thị hàm số (C) suy ra hàm số (C'): $y=\left|\dfrac{-x-1}{x-1}\right|$

b, Từ đồ thị hàm số (C) suy ra hàm số (C''): $y=\dfrac{-|x|-1}{|x|-1}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x^2 - 9x + 11 + m = 0$.

2) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 1$.

3) Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x$ có đồ thị (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Dựa vào đồ thị (C), tìm m để phương trình $-x^3+3x^2+9x+2m=0$ có hai nghiệm

4) Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình $2x^4 - 4x^2 + m + 2 = 0$.

5) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

6) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Dựa vào đồ thị (C), tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 1 - m = 0$ có 3 nghiệm.

7) Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau: a, $y = \dfrac{2x-1}{2x+2}$ b, $y = \dfrac{x+2}{x+1}$

8) Cho hàm số (C) : y $= -x^3 + 3x + 1$.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Biện luận theo m số nghiệm phương trình: $-|x|^3 + 3|x| = m$

9) Cho hàm số (C): y $= 2x^4 - 4x^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b. Với giá trị nào của m phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

10) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C): $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ và suy ra đồ thị hàm số (C$^/$): $y = \dfrac{2|x|+1}{|x|-1}$

11) Cho hàm số: $y = \dfrac{(a-1)}{3}x^3 + ax^2 + (3a-2)x$.

a. Xác định a để hàm số luôn luôn đồng biến ĐS: $a \geq 2$

b. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) khi a = 3/2

c. Từ đồ thị hàm số (C) suy ra đồ thị hàm số: $y = \left|\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x\right|$

♦ Bài 5 MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

I- TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ

1. Tiếp tuyến của hàm số (C) y = f(x) tại điểm $x_0 \in$ (C).

B_1: Với $x_0 \in$ (C) $\Rightarrow$ f(x_0)

B_2: Tìm hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại x_0 : $f'(x_0)$

B_3: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại x_0 có dạng : y $= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

2. Tiếp tuyến của hàm số (C) y = f(x) khi biết hệ số góc k.

B_1: Gọi điểm M(x_0; y_0) $\in$ (C) $\Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại x_0: $f'(x_0)$

B_2: Vì tiếp tuyến có hệ số góc k $\Rightarrow$ $f'(x_0)$ = k, giải pt tìm x_0 $\Rightarrow$ f(x_0)

B_3: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại x_0 có dạng : y $= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

▹ **Chú ý: +** Nếu tiếp tuyến song song đường thẳng: y = kx + m thì có hệ số góc $f'(x_0)$ = k

+ Nếu tiếp tuyến vuông góc đường thẳng: y = kx + m thì có hệ số góc $f'(x_0)$ .k = - 1

+ Nếu tiếp tuyến tạo với trục 0x một góc α thì có hệ số góc $f'(x_0) = |\tan\alpha|$.

3. Tiếp tuyến của hàm số (C) y = f(x), biết tiếp tuyến đi qua điểm A(x_A; y_A) $\notin$ (C)

B_1: Gọi điểm M(x_0; y_0) $\in$ (C) $\Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại x_0: $f'(x_0)$

B_2: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại x_0 có dạng : y $= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

B_3: Tiếp tuyến đi qua điểm A $\Rightarrow$ $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$, giải pt tìm x_0

B_4: Thế x_0 vào B_2 ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

1) Cho hàm số (C): $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng – 2

Đ/S: y = -25x + 18

2)(KD -10) Cho hàm số $y=-x^4-x^2+6$ .Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{6}x-1$. ĐS: y = – 6x + 10

3) Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x$, biết tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất

ĐS: $y=x-8/3$

4)(KB-08) Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1;-9)$. ĐS: $y = 24x + 15$ hay $y = 15/4\,x - 21/4$

5)(KA-09) Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với Ox, Oy một tam giác cân tại O. Đ/S: $y = -x - 2$

6) Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2\ (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $OA=\frac{1}{9}OB$ ĐS: $y=9x+7$, $y=9x-25$

II- GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ

1. Giao điểm giữa hàm số (C) : $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, với đt d: y = mx + n

+ Phương trình giao điểm của (C) và đường thẳng d: $\frac{ax+b}{cx+d}=mx+n$ (*) $(x\neq-\frac{d}{c})$

+ Đặt (*) bằng g(x) = $Ax^2 + Bx + C = 0$, d cắt (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$ $\Leftrightarrow A\neq 0,\ \Delta>0,\ g(-\frac{d}{c})\neq 0$

2) Giao điểm giữa hàm số (C) y = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ với đt d: y = mx + n

+ PT giao điểm của (C) và (d): $ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + n \Leftrightarrow Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ (1).

+ Nếu PT (1) tìm được nghiệm $x = x_0$

+ Dùng sơ đồ Horner chia phương trình (1) cho $x = x_0$ từ đó (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=ax^2+bx+c=0\ (2)\end{array}\right.$

+ Số giao điểm của (d) và (C) là số nghiệm phương trình (1).

Nếu PT (1) có 3 nghiệm phân biệt thì PT (2) có 2 nghiệm phân biệt khác x_0 $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0,\ \Delta>0 \\ g(x_0)\neq 0\end{cases}$

3) Giao điểm giữa hàm số (C) y = $ax^4 + bx^2 + c$ và đường thẳng d : y = m

+ PT giao điểm của (C) và (d) : $ax^4 + bx^2 + c = m$ (1)

+ Đặt $t = x^2$ (t > 0) $\Rightarrow at^2 + bt + c - m = 0$ (2)

+ Số giao điểm của (d) và (C) là số nghiệm của phương trình (1).

Nếu PT (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0,\ \Delta>0 \\ S>0,\ P>0\end{cases}$

∗ **Ví dụ 1:** Tìm số giao điểm của hàm số hữu tỉ và đường thẳng.

1) Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{2x+1}$ (C) .Tìm m để (C) cắt đường thẳng $(d_m): y=mx+2m-1$ tại 2 điểm phân biệt A, B ĐS: m ≠ 0, m ≠ - 1/3

2)(K$_B$ -09) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng y = - x + m cắt đồ thị hàm số y = $\frac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 4 ĐS: m = $= \pm 2\sqrt{6}$

3)(K_B -10) Cho hàm số y = $\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng y = -2*x* + m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ). ĐS: $m = \pm 2$

4)(K_A-11) Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng y = *x* + m luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất. ĐS: m = - 1

∗ **Ví dụ 2:** Tìm số giao điểm của hàm số bậc ba và đường thẳng.

1)(KD -13) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ (1), m là tham số thực. Tìm m để đường thẳng y = -x +1 cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt. ĐS: m < 0 ∨ m > 8/9

2)(KD -08) Cho hàm số y = $x^3 - 3x + 2$ (C) và đường thẳng (d) qua A(3; 20) có hệ số góc m. Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt. ĐS: m > $\frac{15}{4}$, $m \neq 24$

3)(K_A -10) Cho hàm số y = $x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là số thực. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$

ĐS: -1/4 < m <1, m ≠ 0

4) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = mx + m + 3$. Tìm *m* để (d) cắt (C) tại M(–1; 3), N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau. ĐS: $m = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$

∗ **Ví dụ 3:** Tìm số giao điểm của hàm số bậc 4 và đường thẳng.

1) Cho hàm số : y = $x^4 - (3m + 4)x^2 + m^2$ (C). Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

ĐS : m > - 4/5, m ≠ 0

2)(K_D -09) Cho đường thẳng d: $y = -1$ và hàm số (C_m): $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$.

Tìm m để (d) cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 (Đ/S: $-\frac{1}{3} < m < 1, m \neq 0$)

3) Tìm m để hàm số y = $x^4 - 2mx^2 + 2m + 3$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 44$ ĐS : m > 3, m = $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

4) Cho hàm số y = $-x^4 + (m + 1)x^2 - m + 1$, ($C_m$). Tìm m để đường thẳng y = 1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn hoặc bằng 3 và các hoành độ đó lập thành cấp số cộng.

ĐS: m = 9, m = 1/9

III - Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số (C): y = f(*x*)

• Gọi M(x_0; y_0) ∈ (C) ⟹ $y_0 = f(x_0)$, áp dụng điều kiện còn lại tìm x_0

Chú ý: + Tìm điểm không đổi M ∈ (C), ta biến đổi pt $y_0 = f(x_0)$ về dạng: $f(x_0; y_0)m + g(x_0; y_0) = 0$

+ Công thức khoảng cách: $d(M;0x) = |y_0|$ $d(M;0y) = |x_0|$, $d(M;\Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1)(KD – 14) Cho hàm số y = $x^3 - 3x - 2$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9. ĐS: M là (-2; -4) và (2; 0)

2)(K_D-07) Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ (C). Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt Ox, Oy tại A, B tạo thành tam giác OAB có diện tích bằng 1/4. Đ/S: $M_1(-1/2; -2); M_2(1;1)$

3) Cho hàm số (C): y = $\frac{2x-1}{x+1}$. I là giao điểm hai đường tiệm cận. Tìm điểm M thuộc đồ thị (C), sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và IM có tích hệ số góc bằng – 9. ĐS: (0; -1), (- 2; 5).

4) Cho hàm số (C): y = (m + 2)x^3 + 2(m + 2)x^2 – (m + 3)x – 2m + 1. Tìm các điểm thuộc (C) mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi m. ĐS: A(- 2;7), B(1; 4), C(- 1;6)

5)(KA-14) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng y = - x bằng $\sqrt{2}$ ĐS: M là (-2; 0) và (0; -2).

6) Cho hàm số $y = \frac{3x-4}{x-2}$ (C). Tìm các điểm thuộc (C) có hoành độ nguyên và cách đều 2 trục tọa độ.

ĐS: M_1(1; 1) và M_2(4; 4)

7) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. ĐS: A(0; 1) , B(–2; 3).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Lập phương trình tiếp tuyến

1)(CĐ -13) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Gọi M là điểm thuộc (C) có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tọa Ox và Oy lần lượt tại A và B. Tính diện tích ΔOAB. ĐS: y = -3x + 11, S = 121/6

2) Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C).

a, Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng: y = - 4x + 1

b, Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; -2/3)$.

c, Viết pt tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác vuông cân.

ĐS: a) y = - 4x + 2, y = - 4x + 14, b) $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$ c) y = - x – 1, y = - x – 7

3) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng tiếp tuyến cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA = 9OB$. ĐS: $y = -\frac{1}{9}x + \frac{25}{9}$, $y = -\frac{1}{9}x + \frac{13}{9}$

Bài 2: Tìm giao điểm của hai hàm số

1) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Xét đường thẳng (d_m) đi qua điểm A(- 2; 2) có hệ số góc m. Tìm m để (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt. ĐS: m < 0 v m > 12

2)(K$_D$ -11) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k +1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

ĐS: k < $3-2\sqrt{2} \vee k > 3+2\sqrt{2}$,k ≠ 0, k =-3

3) Tìm m để đường thẳng (d): $y = -x + m$ cắt (C): $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho AB đạt giá trị nhỏ nhất ĐS: m = 0

4) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$, (C). Xác định m để đường thẳng y = 2x + m cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. ĐS: m = - 1

5) Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ có đồ thị là (C). Định m để đường thẳng $(d): y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt. ĐS: m > - 3

6) Cho hàm số y = x^3 – 3x (C) và đường thẳng (d): y = m(x + 1) + 2. Tìm m để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ thõa $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ ĐS: - 9/4 < m < - 2

7) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$ có đồ thị (C_m). Tìm *m* để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15. ĐS: m > 1 v m < -1

8) Viết phương trình đường thẳng (d) cắt đồ thị (C): y = $x^3 - 3x + 2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 2$, BC = $2\sqrt{2}$ ĐS: y = *x* + 2

9) Cho hàm số y = $x^4 - mx^2 + m - 1$ (C). Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. ĐS: $1 < m \neq 2$

10) Cho đường thẳng d: $y = -1$ và hàm số (C_m): $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$. Tìm m để (d) cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thõa, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 4$ ĐS: m = -2/9

11) Cho hàm số (C_m): $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$. Tìm m để ($C_m$) cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng. Đ/S: $m = 2; m = -4/9$

Bài 3: Tìm điểm thuộc đồ thị

1) Cho hàm số $y = (x+2)(x-1)^2$ (C). Tìm các điểm M trên đường thẳng $d: y = -2x + 19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M vuông góc đường thẳng $x + 9y - 8 = 0$. ĐS: $M(3;13)$, $M\left(\frac{1}{11};\frac{207}{11}\right)$.

2) Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$. Tìm điểm *M* trên đồ thị (*C*) biết tiếp tuyến của (*C*) tại *M* cắt (*C*) tại điểm thứ hai là *N* sao cho *N* cùng với hai điểm cực trị của đồ thị (*C*) tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3, biết *N* có tung độ dương. ĐS: M(3/4; 25/32)

3) Cho hàm số y = $x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm toạ độ hai điểm P, Q ∈ (C) sao cho đường thẳng PQ song song với trục Ox và khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến đường thẳng PQ bằng 8. ĐS: P(-2;9), Q(2;9)

4) Cho hàm số $y = \frac{3x-4}{x-2}$ (C). Tìm các điểm M thuộc (C) sao cho M cách đều 2 đường tiệm cận.

ĐS: M_1(1; 1) , M_2(4; 6)

Hết

Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.

b) Tìm điểm *M* trên đồ thị (*C*) biết tiếp tuyến của (*C*) tại *M* cắt (*C*) tại điểm thứ hai là *N* sao cho *N* cùng với hai điểm cực trị của đồ thị (*C*) tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3, biết *N* có tung độ dương.

1,0 *điểm*	
(*C*) có hai điểm cực trị $A(1;1)$, $B(2;0) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng $AB: x + y - 2 = 0$. $S_{\Delta ABN} = \frac{1}{2}d(N;\ AB).AB = 3 \Leftrightarrow d(N;\ AB) = 3\sqrt{2}$	0.25
Gọi *d* là đường thẳng đi qua *N* và $d\,//\,AB$. Phương trình của *d* có dạng $x + y + c = 0 \Rightarrow d(A,d) = d(N,AB) \Leftrightarrow \frac{\lvert c+2\rvert}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 4 \\ c = -8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} N(0;-4)\ (loai) \\ N(3;5) \end{array}\right.$	0.25
Với $N(3;\ 5)$, giả sử $M(x_0;\ y_0)$. Pt tiếp tuyến với (*C*) tại *M* là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Do tiếp tuyến đi qua *N* nên ta có: $5 = (6x_0^2 - 18x_0 + 12)(3 - x_0) + 2x_0^3 - 9x_0^2 + 12x_0 - 4$	0.25
$\Leftrightarrow (x_0 - 3)^2(4x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3\ (loai, vi\ N \neq M) \\ x_0 = \frac{3}{4} \end{array}\right.$. Vậy $M\left(\frac{3}{4};\frac{25}{32}\right)$.	0.25

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm toạ độ hai điểm P, Q thuộc (C) sao cho đường thẳng PQ song song với trục hoành và khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến đường thẳng PQ bằng 8.

• *Điểm cực đại của (C) là* $A(0;1)$. *PT đường thẳng PQ có dạng:* $y = m\ (m \geq 0)$.

Vì $d(A, PQ) = 8$ *nên* $m = 9$. *Khi đó hoành độ các điểm P, Q là nghiệm của phương trình:*

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Vậy: $P(-2;9), Q(2;9)$ *hoặc* $P(2;9), Q(-2;9)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm các điểm thuộc (C) cách đều 2 tiệm cận.

• *Gọi* $M(x;y) \in$ *(C) và cách đều 2 tiệm cận x = 2 và y = 3.*

Ta có: $|x-2| = |y-3| \Leftrightarrow |x-2| = \left|\dfrac{3x-4}{x-2} - 2\right| \Leftrightarrow |x-2| = \left|\dfrac{x}{x-2}\right| \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-2} = \pm(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thoả mãn đề bài là : $M_1(1;1)$ *và* $M_2(4;6)$