

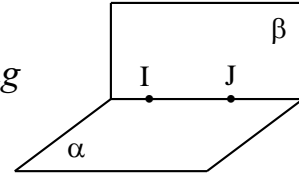
BÀI 1: ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Vấn đề 1 : TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG α VÀ β :

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng α và β ta đi tìm hai điểm chung $I ; J$ của α và β $\square \alpha \cap \beta = IJ$

Khi tìm điểm chung ta chú ý :

- Cách gọi tên hai mặt phẳng để phát hiện điểm chung
- $M \in d$ và $d \subset \alpha \square M \in \alpha$
- $\begin{cases} a \cap b = M \text{ trong } (P) \\ a \subset \alpha ; b \subset \beta \end{cases} \square M \text{ là điểm chung}$



1. 1: 1) Cho tứ diện ABCD có E là trung điểm của AB. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (ECD) với các mặt phẳng (ABC) ; (ABD) ; (BCD) ; (ACD)

2) Cho tứ diện SABC và một điểm I trên đoạn SA; d là đường thẳng trong (ABC) cắt AB; BC tại J ; K. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (I,d) với các mặt phẳng sau : (SAB) ; (SAC) ; (SBC)

1. 2: 1) Cho tứ giác lồi ABCD và điểm S không nằm trong mặt phẳng chứa tứ giác. Tìm giao tuyến của :

- a) (SAC) và (SBD) b) (SAB) và (SCD) c) (SAD) và (SBC)

2) Cho hình chóp S.ABCDE. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (SAC) với các mặt phẳng (SAD) ; (SCE)

1. 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi ; M là điểm trên cạnh CD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng :

- a) (SAM) và (SBD) b) (SBM) ; (SAC)

1. 4: Cho tứ diện ABCD; M là điểm nằm trong $\square ABC$; N là điểm nằm trong $\square ACD$. Tìm giao tuyến của : a) (AMN) và (BCD) b) (CMN) và (ABD)

1. 5: Cho tứ diện ABCD .M nằm trên AB sao cho $AM = \frac{1}{4} MB$; N nằm trên AC sao cho $AN = 3NC$; điểm I nằm trong $\square BCD$. Tìm giao tuyến của :

- a) (MNI) và (BCD) b) (MNI) và (ABD) c) (MNI) và (ACD)

1. 6: Cho tứ diện ABCD ; gọi I ; J lần lượt là trung điểm của AD; BC .

a) Tìm giao tuyến của : (IBC) và (JAD)

b) M là điểm trên AB; N là điểm trên AC. Tìm giao tuyến của (IBC) và (DMN)

1. 7: Cho hai đường thẳng $a ; b \in (P)$ và điểm S không thuộc (P). Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng chứa a và S với mặt phẳng chứa b và S ?

1. 8: Cho tứ diện ABCD ; trên AB ; AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho :

$\frac{AM}{MB} \neq \frac{AN}{NC}$. Tìm giao tuyến của (DMN) và (BCD)

1. 9; Cho bốn điểm ABCD không đồng phẳng ; gọi I ; K là trung điểm AD ; BC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) ?

1. 10 : Trong mặt phẳng α cho hình thang ABCD có đáy là AB ; CD ; S là điểm nằm ngoài mặt phẳng hình thang. Tìm giao tuyến của :

- a) (SAD) và (SBC) b) (SAC) và (SBD)

1.11. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang hai đáy là AD ; BC .Gọi M ; N là trung điểm AB ; CD và G là trọng tâm ΔSAD . Tìm giao tuyến của :
 a) (GMN) và (SAC) b) (GMN) và (SBC)

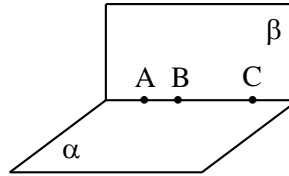
Vấn đề 2: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG VÀ BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Chứng minh A ; B ; C thẳng hàng :

Chỉ ra $A ; B ; C \in \alpha$

Chỉ ra $A ; B ; C \in \beta$

Kết luận : $A ; B ; C \in \alpha \cap \beta \Rightarrow A ; B ; C$ thẳng hàng

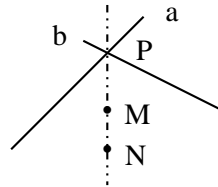


Chứng minh a ; b ; MN đồng quy :

Đặt $a \cap b = P$

Chứng minh M ; N ; P thẳng hàng

Kết luận : MN ; a ; b đồng quy tại P



2. 1: Cho hai mặt phẳng α và β cắt nhau theo giao tuyến d .Trên α lấy hai điểm A ; B nhưng không thuộc d. O là điểm ở ngoài hai mặt phẳng . Các đường thẳng OA ; OB lần lượt cắt β tại A' ; B'. AB cắt d tại C

a) Chứng minh O ; A ; B không thẳng hàng ?

b) Chứng minh A' ; B' ; C' thẳng hàng ? Từ đó suy ra AB ; A'B' ; d đồng quy

2. 2: Trong không gian cho ba tia Ox ; Oy ; Oz không đồng phẳng. Trên Ox lấy A ; A' ; trên Oy lấy B ; B' trên Oz lấy C ; C' sao cho AB cắt A'B' tại D ; BC cắt B'C' tại E ; AC cắt A'C' tại F. Chứng minh D ; E ; F thẳng hàng ?

2. 3: Cho A ; B ; C không thẳng hàng ở ngoài mặt phẳng α . Gọi M ; N ; P lần lượt là giao điểm AB ; BC ; AC với α . Chứng minh M ; N ; P thẳng hàng ?

2. 4: 1) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành ; O là giao điểm hai đường chéo ; M ; N lần lượt là trung điểm SA ; SD. Chứng minh ba đường thẳng SO ; BN ; CM đồng quy

2) Cho tứ diện ABCD.Mặt phẳng α không song song AB cắt AC ; BC ; AD ; BD lần lượt tại M ; N ; R ; S . Chứng minh AB ; MN ; RS đồng quy ?

2. 5: Chứng minh trong một tứ diện các đường thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện đồng quy ?

2.6. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang hai đáy là AD ; BC .Gọi M ; N là trung điểm AB ; CD và G là trọng tâm ΔSAD . Tìm giao tuyến của :

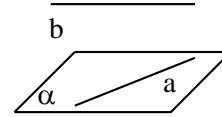
a) (GMN) và (SAB) b) (GMN) và (SCD)

c) Gọi giao điểm của AB và CD là I ; J là giao điểm của hai giao tuyến của câu a và câu b. Chứng minh S ; I ; J thẳng hàng ?

Vấn đề 3: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU, VÀ CÁC ĐIỂM ĐỒNG PHẪNG

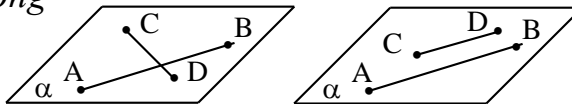
Chứng minh 2 đường thẳng a ; b chéo nhau :

- Giả sử : a không chéo b
- Từ đó suy ra hai đường thẳng a và b nằm trong cùng một mặt phẳng α (đồng phẳng)
- Từ đó suy ra điều mâu thuẫn với giả thiết hoặc mâu thuẫn với một điều đúng nào đó



Chứng minh A, B, C, D nằm trong cùng một mặt phẳng – đồng phẳng

- Chứng minh hai đường thẳng tạo thành từ bốn điểm đó cắt nhau hoặc song song với nhau



- 3. 1:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng
 a) Chứng minh ba trong số 4 điểm này không thẳng hàng
 b) Chứng minh AB chéo với CD ?
- 3. 2:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Trên a lấy hai điểm A, B ; trên b lấy hai điểm C, D
 a) Chứng minh AC chéo BD ?
 b) Lấy M nằm trên đoạn AC; N nằm trên đoạn BD. Đường thẳng MN có song song AB hoặc CD không ?
 c) O là trung điểm MN. Chứng minh A, O, C, N đồng phẳng
- 3. 3:** Cho đường thẳng a cắt hai đường thẳng b và c. Hỏi ba đường thẳng a, b, c có đồng phẳng không ? Tại sao ?
- 3. 4:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I ; J là trung điểm AD; BC.
 a) Chứng minh AB chéo CD ? b) Chứng minh IB chéo JA ?

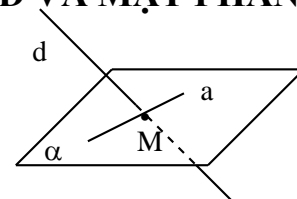
Vấn đề 4: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG D VÀ MẶT PHẪNG α

Giả sử phải tìm giao điểm $d \cap \alpha = ?$

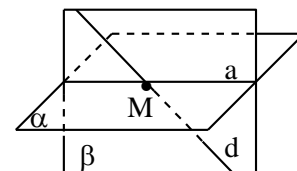
Phương pháp 1:

Tìm $a \subset \alpha$

Chỉ ra được a, d nằm trong cùng một mặt phẳng và chúng cắt nhau tại M $\square d \cap \alpha = M$ (hình vẽ)



Phương pháp 2:



Tìm β chứa d thích hợp

Giải bài toán tìm giao tuyến a của α và β

Trong β : $a \cap d = M \quad \square \quad d \cap \alpha = M$ (hình vẽ b)

4. 1: Cho tứ diện SABC; M ; N lần lượt là các điểm nằm trong $\triangle SAB$; $\triangle SBC$. MN cắt (ABC) tại P. Xác định giao điểm P

4. 2: Cho tứ diện ABCD ; M là trung điểm AB; N và P lần lượt là các điểm nằm trên AC; AD sao cho $AN : AC = 3 : 4$; $AP : AD = 2 : 3$. Tìm giao điểm :

- a) MN với (BCD) b) BD với (MNP)
c) Gọi Q là trung điểm NP. Tìm giao điểm của MQ với (BCD)

4. 3: A; B ; C ; D là bốn điểm không đồng phẳng. M; N lần lượt là trung điểm của AC; BC. Trên đoạn BD lấy P sao cho $BP = 2PD$. Tìm giao điểm của :

- a) CD với (MNP) b) AD với (MNP)

4. 4: Cho hình chóp SABC ; O là điểm trong $\triangle ABC$; D và E là các điểm nằm trên SB ; SC. Tìm giao điểm của a) DE với (SAO) b) SO với (ADE)

4. 5: Cho tứ diện SABC. I ; H lần lượt là trung điểm SA; AB. Trên đoạn SC lấy điểm K sao cho $CK = 3KS$.

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng BC với (IHK) ?
b) Gọi M là trung điểm HI. Tìm giao điểm của đường thẳng KM với (ABC) ?

4. 6: Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang ABCD đáy lớn AB. I; J; K là ba điểm trên SA; SB; SC . Tìm giao điểm IK và (SBD); giao điểm (IJK) và SD; SC

4. 7: Gọi I ; J lần lượt là hai điểm nằm trong $\triangle ABC$; $\triangle ABD$ của tứ diện ABCD. M là điểm tùy ý trên CD. Tìm giao điểm IJ và mặt phẳng (AMB)

4. 8: Hình chóp SABCD đáy là hình bình hành ABCD. M là trung điểm SD

- a) Tìm giao điểm I của BM và (SAC) ? Chứng minh : $BI = 2IM$?
b) Tìm giao điểm J của của SA và (BCM) ? Chứng minh J là trung điểm SA ?
c) N là điểm tùy ý trên BC. Tìm giao điểm của MN với (SAC) ?

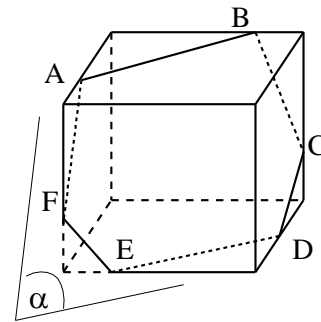
Vấn đề 5: THIẾT DIỆN TẠO BỞI MẶT PHẪNG α VỚI KHỐI ĐA DIỆN

Lần lượt xét giao tuyến của α với các mặt của khối đa diện đồng thời xét giao điểm của các cạnh của đa diện với mặt phẳng α

Khi các đoạn giao tuyến tìm được khép kín thành đa giác ta được thiết diện phải tìm.

Việc chứng minh tiết diện có hình dạng đặc biệt như hình bình hành; hình thang; ... trong mặt phẳng α cũng nhờ vào quá trình đi tìm giao tuyến và giao điểm ở trên

Trong phần này ta chỉ xét hai cách làm cơ bản :



I. Xác định thiết diện bằng cách kéo dài các giao tuyến

II. Xác định thiết diện bằng cách vẽ giao tuyến phụ

5. 1: 1) Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Gọi M ; N ; P lần lượt là trung điểm AA' ; AD ; DC . Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua M; N; P với hình lập phương ?

2) Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Gọi M ; N ; P lần lượt là trung điểm DC ; AD ; BB'. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình hộp và giao tuyến của (MNP) với mặt phẳng (A'B'C'D')

5. 2: 1) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành . Gọi E; F; K lần lượt là trung điểm của SA ; AB ; BC. Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng đi qua ba điểm E; F ; K

2) Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A' ; B' ; C' lần lượt là các điểm nằm trên SA ; SB; SC. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (A'B'C') với hình chóp

***5. 3:** Cho tứ diện ABCD ; điểm I nằm trên BD và ở ngoài BD sao cho $ID = 3IB$; M ; N là hai điểm thuộc cạnh AD ; DC sao cho $MA = \frac{1}{2} MD$; $ND = \frac{1}{2} NC$

a) Tìm giao tuyến PQ của (IMN) với (ABC) ?

b) Xác định thiết diện tạo bởi (IMN) với tứ diện ?

c) Chứng minh MN ; PQ ; AC đồng qui ?

***5. 4:** 1) Cho tứ diện ABCD ; điểm I ; J lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$; $\triangle DBC$; M là trung điểm AD. Tìm tiết diện tạo bởi (MJI) và tứ diện ?

2) Cho hình chóp S.ABCDE. Lấy ba điểm M ; N ; K trên SA ; BC ; SD. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNK) với hình chóp

5.5: Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy. Gọi M ; N là trung điểm SB ; SC .

- Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC) ?
- Tìm giao điểm của SD với mặt phẳng (AMN) ?
- Tìm tiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMN) với hình chóp

***5.6:** Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M là trung điểm SC

- Tìm giao điểm I của AM với (SBD) ? Chứng minh $IA = 2IM$
- Tìm giao điểm F của SD với (AMB) ? Chứng minh F là trung điểm SD ?
- Xác định hình dạng tiết diện tạo bởi (AMB) với hình chóp
- Gọi N là một điểm trên cạnh AB. Tìm giao điểm của MN với (SBD) ?

***5.7.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M ; N ; P lần lượt là trung điểm SB ; SD ; OC

- Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC) ?
- Dựng thiết diện của (MNP) với hình chóp ?
- Tính tỉ số mà (MNP) chia cạnh SA ; BC ; CD ? ĐS: c) 3 : 1 ; 1 : 1 ; 1 : 1

5.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành; gọi M là trung điểm SB ; G là trọng tâm ΔSAD

- Tìm giao điểm I của GM với (ABCD) ?
- Chứng minh (CGM) chứa đường thẳng CD ?
- Chứng minh (CGM) đi qua trung điểm SA ?
- Dựng tiết diện của (CGM) với hình chóp ?

***5.9.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O ; I ; J là trọng tâm ΔSAB ; ΔSAD

- Tìm giao điểm của IJ với (SAC) ?
- Dựng thiết diện tạo bởi (JIO) với hình chóp

5.10. Cho hình chóp SABCD. Gọi I ; M ; N là ba điểm trên SA ; AB ; CD

- Tìm giao tuyến của (SAN) và (SDM) ?
- Hãy xác định thiết diện tạo bởi (IMN) với hình chóp

BÀI TẬP TỔNG HỢP

1: Cho tứ diện ABCD ; I là điểm nằm ngoài đoạn BD. Mặt phẳng (α) qua I cắt AB; BC; CD; DA tại M; N; P; Q.

- Chứng minh I ; M ; Q thẳng hàng và ba điểm I ; N ; P cũng thẳng hàng ?
- Chứng minh MN; AC; PQ đồng qui ?

2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M là trung điểm SD; E là điểm trên cạnh BC

- a) Tìm giao điểm N của SC với (AME) ?
- b) Tìm giao tuyến của (AME) với (SAC) ?
- c) Tìm giao điểm của K của SA với (MBC) ? Chứng minh K là trung điểm SA

3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành .F là trung điểm CD; E là điểm trên cạnh SC sao cho $SE = 2EC$.Tìm tiết diện tạo bởi (AEF) với hình

4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành .I là trung điểm SD; E là điểm trên cạnh SB sao cho $SE = 3EB$.

- a) Tìm giao điểm F của CD với mặt phẳng (AIE) ?
- b) Tìm giao tuyến d của (AIE) với (SBC) ?
- c) Chứng minh BC ; AF ; d đồng qui ?

5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi .F là trung điểm SC; E là điểm trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$.

- a) Tìm tiết diện tạo bởi (AEF) với hình chóp ?
- b) Tìm giao điểm của SB với (AEF) ?

6: Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O ; M là trung điểm SB; G là trọng tâm ΔSAD

a) Tìm giao điểm I của GM với (ABCD) và chứng minh I nằm trên đường thẳng CD và $IC = 2ID$?

b) Tìm giao điểm J của (OMG) với AD ? Tính tỉ số $\frac{JA}{JD}$

c) Tìm giao điểm K của (OMG) với SA ? Tính $\frac{KA}{KS}$ HD: b) 2 c) 2

7: Cho tứ diện ABCD; trên AD lấy N sao cho

$AN = 2ND$; M là trung điểm AC ; trên BC lấy Q sao cho $BQ = \frac{1}{4} BC$

- a) Tìm giao điểm I của MN với (BCD) ? Tính IC:ID
- b) Tìm giao điểm J của BD với (MNP) ? Tính JB:JD

8 Cho tứ diện ABCD. Gọi I ; J là hai điểm cố định nằm trên AB ; AC và IJ không song song với BC. Mặt phẳng α quay quanh IJ cắt cạnh CD ; BD tại M ; N

- a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định ?
- b) Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM ?
- c) Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN ?

9. Cho hình chóp SABC. Gọi A' ; B' ; C' là các điểm di động trên SA ; SB ; SC thoả :

$$SA' = \frac{1}{n+1} SA ; SB' = \frac{1}{2n+1} SB ; SC' = \frac{1}{3n+1} SC$$

- a) Chứng minh A'B' đi qua một điểm cố định I và A'C' đi qua điểm cố định J khi n thay đổi ?
b) Chứng minh (A'B'C') chứa một đường thẳng cố định
HD: a) dùng định lý Menelaus b) đường IJ

BÀI 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Vấn đề 1: Chứng minh \odot -êng thẳng song song với một phẳng
Phương pháp :

Có thể dùng một trong các cách sau :

- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lý đảo của định lý Ta-lét ...)
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ 3.
- Áp dụng định lý về giao tuyến.

Bùi 1. Cho tứ diện SABC cắt I, J lần lượt trung điểm của AB và BC. CMR: với $\forall M \in SB$ ($M \neq B$) ta có $MI \parallel (ACM)$

Bùi 2. Cho tứ diện ABCD cắt M và N lần lượt trung điểm của ΔABD và ΔACD . CMR: $MN \parallel (BCD)$ và $MN \parallel (ABC)$

Bùi 3. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Trên các cạnh AD, BE lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BE} = k$ ($0 < k < 1$). Chứng minh rằng $MN \parallel (CDE)$

Bùi 1: Cho tứ diện ABCD. Gặp I, J lần lượt trung điểm của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh $IJ \parallel CD$

Bùi 2: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang với các cạnh đáy AB và CD ($CD > AB$). Gặp M, N lần lượt trung điểm của SA, SB

a, Chứng minh $MN \parallel CD$

b, Tìm giao điểm P của SC và mp(AND). Đo độ dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$. Tọa độ của SABI là hình gì?

Bùi 3: Cho tứ diện ABCD. Gặp M, N, P, Q, R, S lần lượt trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD

a, Chứng minh MNPQ là hình bình hành

b, Chứng minh MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi một

Bùi 4: Cho tam giác ABC nằm trong mp(P). Gặp Bx; Cy là 2 nửa đường thẳng song song và nằm về cùng phía với mp(P). M và N là 2 điểm di động lần lượt trên x, Cy sao cho $CN = 2BM$

a, Chứng minh rằng MN luôn đi qua điểm cố định I khi M, N di động

b, E là trung điểm của AM và $EM = \frac{1}{3}EA$. Gọi F là giao điểm của IE và AN, Q là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng $AQ \parallel BC \parallel Cy$ và (QMN) chứa trục trung tâm của hình khi M, N di động

Bài 5: Cho hình chập SABCD của hình lập phương. Gọi M, N, P, Q là các điểm trên BC, SC, SD và AD sao cho $MN \parallel SB, NP \parallel CD, MQ \parallel CD$

a, Chứng minh $PQ \parallel SA$

b, Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh $SK \parallel AD \parallel BC$, Qua Q dựng $Qx \parallel SC; Qy \parallel SB$. Tìm giao điểm của Qx và mp(SAB); giao điểm của Qy và mp(SCD)

Bài 6: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên hai đường thẳng chéo nhau AC và BF lần lượt lấy hai điểm M; N sao cho $AM : AC = BN : BF = 1 : 3$. Chứng minh $MN \parallel DE$

Bài 7: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên hai đường thẳng chéo nhau AC và BF lần lượt lấy hai điểm M; N sao cho $AM : AC = BN : BF = 5$. Dựng $MM' \perp AB$ với M' trên AD; $NN' \perp AB$ với N' trên AF. Chứng minh: a) MM' và $NN' \parallel CD$ b) $M'N' \parallel DF$

Vấn đề 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng - Thiết diện qua một điểm và song song với trục trung tâm cho trục

Bài 1: Cho hình chập SABCD của hình lập phương. Gọi I; J là trung điểm của AD và BC. Gọi G là trung tâm của tam giác SAB

a, Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG)

b, Xác định thiết diện của hình chập với mp(IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện để với AB và CD có thiết diện là hình bình hành

Bài 2: Cho hình chập SABCD của hình lập phương. Gọi I, J là trung tâm của tam giác SAB và SAD và M là trung điểm của CD. Xác định thiết diện của hình chập cắt bởi mp(IJM)

Bài 3: Cho hình chập SABCD của hình lập phương với các cạnh $AD = a; BC = b$. Gọi I; J là trung tâm của tam giác SAD và SBC

a, Tìm giao tuyến của mp(ADJ) và mp(SBC); của (BCI) và (SAD)

b, Tìm diện tích giao tuyến của 2 mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi 2 mp (SAB) và (SCD)

Bùi 4: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD với $KB = 2KD$.

a, Xác định thiết diện của tứ diện với mp(IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân

b, Tính diện tích của thiết diện theo a

Bùi 5: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, $\angle SAD = 90^\circ$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

a, Tìm giao điểm I của Dx và mp(SAB). Chứng minh $AI \parallel SB$

b, Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(AIC) và tính diện tích của thiết diện

Bùi 6: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành; I, J lần lượt là trung điểm của SA và AB. M là một điểm bất kỳ trên nửa đường thẳng Ax chứa C. Biện luận theo vị trí của M trên Ax các đường của thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(IJM)

Bùi 7: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a; mặt bên SAB là tam giác đều; $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SA và SB. M là một điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N

a, Chứng minh HKMN là hình thang cân

b, Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$). Tính diện tích tứ giác HKMN theo a và x. Tìm x để diện tích này nhỏ nhất

c, Tìm tiếp diện của HM và KN; HN và KM

Bùi 8: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, lấy M trên cạnh BA; P trên cạnh CD sao cho $AM = DP = \frac{a}{3}$. Xác định thiết diện của tứ diện và mặt phẳng qua MP và song song với AC. Tính diện tích thiết diện

BÀI 3: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Vấn đề 1: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Phương pháp chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng P

Ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với đường thẳng a chứa trong (P) .

Ghi chú : Nếu a không có sẵn trong hình thì ta chọn một mặt phẳng (Q) chứa d và lấy a là giao tuyến của (P) và (Q) .

Bùi 1: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD

a, Chứng minh $MN \parallel mp(SBC)$ và $MN \parallel mp(SAD)$

b, Gọi P là trung điểm của SA . Chứng minh SB và SC song song với $mp(MNP)$

c, Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh $G_1G_2 \parallel mp(SAC)$

Bùi 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trọng tâm của tam giác ABD , M' trên BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MM' \parallel mp(ACD)$

Bùi 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O và O' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và ABD . Chứng minh:

a, Điều kiện cần và đủ để $OO' \parallel mp(BCD)$ là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB+AC}{AB+AD}$

b, Điều kiện cần và đủ để $OO' \parallel mp(BCD)$ và $mp(ACD)$ là $BC = BD$ và $AC = AD$

Bùi 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng

a, Gọi O và O' lần lượt là trọng tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh $OO' \parallel (ADF)$; $OO' \parallel (BCE)$

b, Trên AE và BD lấy M và N sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$; $BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh $MN \parallel mp(CDEF)$

Bùi 5: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy trung điểm M ; trên BC lấy điểm N bất kì. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD .

a) Tìm tiết diện của tứ diện $ABCD$ với (α) ?

b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho tiết diện là hình bình hành?

Bùi 6: Cho hình chóp $SABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AD . Gọi M là điểm bất kì trên cạnh AB . (α) là mặt phẳng qua M và song song AD và SD .

a) Mặt phẳng (α) cắt $SABCD$ theo tiết diện là hình gì?

b) Chứng minh $SA \parallel (\alpha)$

Bùi 7: Cho hình chóp $SABCD$. có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) di động luôn luôn song song BC và đồng thời đi qua trung điểm C' của SC .

a) Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA ; SB ; SD lần lượt tại A' ; B' ; D' tiết diện $A'B'C'D'$ là hình gì?

- b) Chứng minh rằng (α) khi chuyển động luôn luôn chứa một đường thẳng cố định
 c) Gọi M là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Chứng minh khi (α) di động thì M di động trên đường thẳng cố định

Bùi 8: Cho hình chóp S.ABCD đáy là bình hành. Gọi M là điểm di động trên cạnh SC; mặt phẳng (α) chứa AM và Δ BD

- a) Chứng minh (α) luôn luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M chuyển động trên cạnh SC
 b) (α) cắt SB và SD tại E ; F . Trình bày cách dựng E và F ?
 c) Gọi I là giao điểm của ME và CB; J là giao điểm của MF và CD . Chứng minh ba điểm I ; J ; A thẳng hàng

Vấn đề 2: . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng -

Thiết diện song song với α -êngh thẳng cho tr-íc

Bùi 1: Cho h×nh chấp SABCD. Găi M vù N lù hai đióm bết k× tr^an SB vù CD. (α) lù măt phẳng qua MN vù song song vói SC

a, Tìm giao tuyến của mp (α) vói c, c măt phẳng (SBC); (SCD); SAC)

b, X, c Đnh thiết diện của h×nh chấp c³4t bëi mp (α)

Bùi 2: Cho tở diện ABCD cũ AB = a; CD = b. Găi I, J lçn l-ít lù trung đióm của AB vù CD. (P) lù măt phẳng qua M tr^an IJ vù song song vói AB vù CD

a, Tìm giao tuyến của mp(P) vói mp(IJD)

b, X, c Đnh thiết diện của h×nh chấp c³4t bëi mo(P). Thiết diện lù h×nh g×?

Bùi 3: Cho h×nh chấp SABCD cũ α, γ lù h×nh b×nh hính. Găi C' lù trung đióm của SC; M lù đióm di đéng tr^an SA, (P) lù măt phẳng di đéng lu«n đi qua C'M vù song song vói BC

a, Chøng minh (P) lu«n chøa α -êngh thẳng cè đnh

b, X, c Đnh hiõ diện của hình chấp c³4t bëi mp(P). X, c Đnh điám M α thiết diện lù h×nh b×nh hính

c, Tìm tếp híp giao đióm của hai c¹nh α của thiết diện khi M di chuyón tr^an c¹nh SA

Bùi 4: Cho h×nh chấp SABCD cũ α, γ lù h×nh thang vói α, γ lín BC = 2a; AD = a vù AB = b. Măt b^an SAD lù ta, gi, c Đou, (P) lù măt phẳng qua đióm M tr^an đoin AB vù song song vói SA vù BC, pm(P) c³4t CD; SC; SB lçn l-ít tⁱ I; J; K

a, Chøng minh MIJK lù h×nh thang cón

b, Týnh diện tích thiết diện của h×nh chấp c³4t bëi mp(P) theo a vù $x = AM$.

Bùi 5: Cho hình chập SABCD. Gọi M và N là hai điểm trên AB và CD và (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SA
a, Tìm các giao tuyến của (P) với (SAB) và (SAC)
b, Xác định thiết diện của hình chập cắt bởi mp(P)
c, Tìm điều kiện của M; N để thiết diện là hình thang

Bùi 6: Cho hình chập SABCD có O là tâm của hình bình hành đáy O; M là điểm trên SC và (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD

a, Chứng minh (P) luôn chứa một đường thẳng cố định
b, Tìm các giao điểm H và K của (P) với SB và SD. Chứng minh $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM}$ là một hằng số
c, Thiết diện của hình chập với mp(P) là hình thang nội tiếp hay không

Bùi 7: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a; M và P là hai điểm trên đường thẳng của cạnh AD và BC sao cho $AM=CP=x$ ($0 < x < a$). Một mặt phẳng qua MP và song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện

a, Chứng minh thiết diện thẳng đều là hình thang cân
b, Tính x để diện tích thiết diện nhỏ nhất

Bùi 8. Cho hình chập S.ABCD gọi M, N là hai điểm bất kỳ trên SB và CD. (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC

a. Tìm giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SBC), (SCD), và (SAC)
b. Xác định thiết diện của hình chập cắt bởi mặt phẳng (α)

Bùi 9. Cho hình chập S.ABCD có O là tâm của hình bình hành đáy O. M là trung điểm của SB. Xác định thiết diện của hình chập SABCD cắt bởi mặt phẳng (α) biết

a. (α) qua M và song song SO và AD
b. (α) qua O và song song AM và SC

Bùi 10. Cho hình chập S.ABCD; G là trọng tâm Δ ABC; M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG

a. Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và $SH = 2MH = 4RG$

b. G_1 là trọng tâm Δ SBC. Chứng minh rằng $GG_1 // (SAB)$; $GG_1 // (SAC)$

c. Mặt phẳng (α) qua GG_1 và song song BC. Xác định thiết diện của hình chập cắt bởi mặt phẳng (α)

Bùi 11. Cho hình chập S.ABCD cắt bởi mặt phẳng ABCD lấy hình thang bởi lán AD. Mét điểm M bất kỳ trên AB, (α) lấy mặt phẳng qua M và song song AD và SB

a. Xác định thiết diện của hình chập tạo bởi mặt phẳng (α) . Thiết diện lấy hình gì?

b. Chứng minh SC song song (α) .

Bùi 12. Cho tứ diện ABCD cho cạnh a. I lấy trung điểm của AC, J \in AD sao cho AJ = 2JD. M lấy một điểm di động trong Δ BCD sao cho mặt phẳng (MIJ) luôn song song AB

a. Tìm tập hợp điểm M

b. Tính diện tích thiết diện của tứ diện tạo bởi mặt phẳng (MIJ)

BÀI 4: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Vấn Đề 1: MẶT PHẪNG SONG SONG

Phương pháp Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp :

** Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia .*

Bùi 1: Cho hình chập SABCD cắt bởi mặt phẳng lấy hình bình hành tđm O. Gọi M, N lần lượt lấy trung điểm của SA và CD

a, Chứng minh: mp(OMN) // mp(SBC)

b, I lấy trung điểm của SC và J lấy điểm nằm trên mp(ABCD) cắt bởi AB và CD. Chứng minh IJ // mp(SAB)

c, Gọi S là tam giác SAB và ABC có đỉnh A. Gọi AE và AF lấy các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF // mp(SAD)

Bùi 2: Cho hai hình vuông ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AC và BF lấy M và N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD; AF tại M', N'

a, Chứng minh: (CBE) // (ADF)

b, Chứng minh: mp(DEF) // mp(MNN'M')

c, Gọi I lấy trung điểm của MN, tìm tập hợp I khi M, N di động

Bùi 3: Cho tứ diện ABCD cắt bởi AB = AC = AD. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của các góc BAC, CAD, DAB đồng phẳng

Bùi 4: Cho hình chập SABCD cắt bởi mặt phẳng lấy hình bình hành tđm O. Gọi M, N lấy trung điểm của SA, SD

a, Chứng minh $mp(OMN) // mp(SBC)$

b, Gọi P và Q lần lượt trung điểm của AB và ON. Chứng minh $PQ // mp(SBC)$

Bùi 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt hai điểm di động lần lượt trên AD và BC sao cho $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$. Chứng minh IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định

Bùi 6: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành với $AB = a$; $AD = 2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại A. Trên AD lấy M, đặt $AM = x$ ($0 < x < 2a$). Mặt phẳng (α) qua M và song song với $mp(SAB)$ cắt BC; SC; SD tại N, P, Q

a, Chứng minh MNPQ là hình thang vuông

b, Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp I khi M chạy trên AD

c, Tính diện tích MNPQ theo a và x

Bùi 7: Cho 2 đường thẳng a và b chéo nhau. Tìm tập hợp các điểm I trên đoạn MN và chia MN theo tỉ lệ k cho trước trong 2 trường hợp:

a, M, N di động lần lượt trên a, b

b, M, N di động trên a, b và MN luôn song song với 1 mặt phẳng hoặc nằm trên mặt phẳng cho trước cắt a và b

Bùi 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

a) Chứng minh $(HIK) // (ABCD)$.

b) Gọi M là giao điểm của AI và KD, N là giao điểm của DH và CI. Chứng minh $(SMN) // (HIK)$.

Bùi 9: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh $(BA'D) // (B'D'C)$.

b) Chứng minh AC' qua trọng tâm G và G' của tam giác A'BD và CB'D'

Bùi 10: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, CD.

a) Cm: $(OMN) // (SBC)$.

b) Giả sử tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của tam giác ACD và SAB. Cm: $EF // (SAD)$.

Bùi 11: Cho hai hình vuông ABCD, ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC, BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng // AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

- a) Cm: (CBE) // (ADF).
b) Cm: (DEF) // (MNN'M').

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng - Thiết diện cắt bởi mặt phẳng song song với mặt phẳng cho trước

Bùi 1: Cho hình chập SABCD có $SA \perp$ mặt phẳng hình tam giác $ABC = a$; $BD = b$; tam giác SBD đều. Mặt phẳng (α) đi song song với mp(SBD) qua I trên đoạn AC

- a, Xác định thiết diện của hình chập cắt bởi mp(α)
b, Tính diện tích của thiết diện theo a, b và $x = AI$

Bùi 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn (P) // (Q), $\Delta ABC \subset mp(P)$; $MN \subset (Q)$

- a, Tìm giao tuyến của mp(MAB) và mp(Q); giao tuyến của mp(NAC) và mp(Q)
b, Tìm giao tuyến của mp(MAB) và mp(NAC)

Bùi 3: Tõ 4 đõnh của hình bõnh hõnh ABCD vớ 4 nõa đõng thõng song song cũng chiõu Ax; By; Cz; Dt khõng nãm trong mp(ABCD). Mõt mp(α) cõt 4 nõa đõng thõng tõi A'; B'; C'; D'

- a, Chõng minh (Ax; By) // (Cz; Dt)
b, Chõng minh A'B'C'D' lụ hình bõnh hõnh
c, Chõng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$

Bùi 4: Cho tứ diõn ABCD, gãi G_1 ; G_2 ; G_3 lộn l-ít lụ trõng tõm cũc tam gi, cũc ABC, ACD, ABD

- a, Chõng minh $(G_1G_2G_3) // mp(BCD)$
b, Tìm thiõt diõn của tứ diõn cõt bởi mp($G_1G_2G_3$). Tõnh diõn tõch thiõt diõn theo diõn tõch của tam gi, cũc BCD
c, M đi đõng trong tứ diõn sao cho $G_1M // (ACD)$. Tìm tẽp hõp đõm M

Bùi 5: Cho hình chập SABCD có $SA \perp$ mặt phẳng, $SA \perp$ lín $AB = 3a$; $AD = CD = a$, tam gi, cũc SAB cũn tõi S và $SA = 2a$. Mặt phõng (α) đi đõng song song vớ mp(SAB) cõt AD; BC; SC; SD tõi M; N; P; Q

- a, Chõng minh MNPQ lụ hình thang cũn
b, Sõt $x = AM$ ($0 < x < a$). Tìm x đõ MNPQ ngoõi tiõp mõt đõng trõn. Tõnh bõn kõnh đõng trõn đõ
c, Gãi I lụ giao đõm của MQ và NP. Tìm tẽp hõp I khi M đõ đõng trõn AD

Gãi J lụ giao đõm của MP và NQ. Chõng minh IJ cũ phõng khõng đõi và J đi đõng trõn l mp cũ đõnh

Bùi 6: Cho hình chập SABCD có $SA \perp$ mặt phẳng hình tam giác O, E lụ trung đõm của SB. Biõt tam gi, cũc ACE đõu và $AC =$

OD = a. mp(α) đi thẳng song song với mp(ACE) và qua I trên OD, mp(α) cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R

a, Nhận xét gì về tam giác PQR và tứ giác MNPR

b, Tâm tiếp xúc của hai đường thẳng MP và NR khi I đi thẳng trên đường OD

c, Tính diện tích MNPQR theo a và $x = DI$. Xác định x để diện tích là lớn nhất

Bài 7: Cho hình chóp SABCD đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt SA; SB; SC; SD lần lượt tại A'; B'; C'; D'. Chứng minh điều kiện cần và đủ để A'B'C'D' là hình bình hành là mp(P) // (ABCD)

Bài 8: Cho hình chóp SABC, mp(P) đi thẳng song song với mp(ABC) cắt SA; SB; SC lần lượt tại A'; B'; C'. Tâm tiếp xúc của ba mặt phẳng (A'BC), (B'AC), (C'AB)

Bài 9: Cho tứ diện ABCD. Gọi E; F; J theo thứ tự trung điểm của BC; BD; AD. mp(α) qua EF và song song với BJ, mp(β) qua BJ và song song với CD

a, Thiết diện do mp(α) cắt tứ diện là hình gì?

b, Xác định thiết diện do mp(β) cắt tứ diện. Chứng minh $(\alpha) // (\beta)$

c, AC và AD cắt mp(α) lần lượt tại H, K. Gọi I là giao điểm của AC và mp(β). Chứng minh HE; KF và AB đồng quy tại M

d, Gọi S₁ và S₂ là diện tích tam giác ABC và ABD vuông tại B. Tính chu vi tam giác MHK biết chu vi tam giác ACD bằng a

Bài 10: Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang với các cạnh đáy AB; CD với $CD = pAB$ ($0 < p < 1$). Gọi S₀ là diện tích tam giác SAB và (α) là mặt phẳng qua M trên cạnh AD

và song song với mp(SAB). Đặt $\frac{DM}{AD} = x$ ($0 < x < 1$).

a, Xác định thiết diện của hình chóp SABCD với mp(α). Tính diện tích thiết diện theo S₀, p, x

b, Tính x để diện tích thiết diện bằng $\frac{1}{2}S_0$

Bài 11: Cho hình chóp SABC, I là trung điểm của SB và J nằm trên đường thẳng SC sao cho $\vec{JC} = \frac{1}{2}\vec{JS}$ và O là trung tâm tam giác ABC

a, Xác định thiết diện của hình chóp với mp(OIJ), gọi S là diện tích của thiết diện này

b, (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với BC và $MP(\alpha)$ song song với BC . Gọi $\frac{BM}{BC} = x (x > 0)$. Tính x

đó $MP(\alpha)$ cắt hình chóp

c, Chứng minh theo x các tính chất của thiết diện của hình chóp với $MP(\alpha)$

d, Giải $H(x)$ là diện tích của thiết diện này về C . Tính $H(x)$ theo s và x

Bài 12: Cho hình chóp $SABCD$ có E là giao điểm của AD và BC . Mặt phẳng với SE cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự là J, K, H, I

a, Tìm giá trị $IJKH$ là hình gì?

b, Tìm điều kiện cần và đủ để $IJKH$ là hình bình hành

Bài 13: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = a; BC = b; AB = c$. Lấy M trên AB , mặt phẳng qua M song song với AD và BC cắt các cạnh AC, CD, BD là N, P, Q

a, Tìm giá trị $MNPQ$ là hình gì?

b, Gọi $AM = x$. Tính các tính chất của tứ giác $MNPQ$

c, Muốn tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật phải có thêm điều kiện gì? Tìm diện tích tứ giác trong trường hợp này. Tìm vị trí của M trên AB để tứ giác có diện tích lớn nhất

Bài 14: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , Mặt phẳng qua A song song với BC , cắt BD và CD là M, N , Gọi $BM = x$. Tính $AM^2 + MN^2 + AN^2$

Bài 5: Phương chiếu song song - Hình lăng trụ - Hình hộp

Bài 1: Cho lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Mặt phẳng qua BC song song với AA' và BB' chia AC theo tỉ lệ $\frac{1}{2}$?

Bài 2: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Lấy $M \in A'B', N \in AB, P \in CC'$ thỏa mãn: $\frac{AM'}{MB'} = \frac{BN}{NA} = \frac{C'P}{PC} = \frac{1}{2}$.

Mặt phẳng (MPN) cắt $B'C'$ là Q . Tính $\frac{C'Q}{B'C'}$

Bài 3: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Giải H là trung điểm của $A'B'$

a, Chứng minh $C'B // MP(AHC')$

b, Tìm giao điểm của AC' và $MP(BCH)$

c, Mặt phẳng qua trung điểm của CC' và song song với AH và CB' . Xác định thiết diện và tỉ lệ của các thiết diện chia các cạnh của lăng trụ

Bùi 4: Cho hình tròn $ABCA'B'C'$

a, Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(BA'C')$

b, Gọi M và N lần lượt 2 điểm bất kỳ trên AA' và BC . Tìm giao điểm của $B'C'$ với $mp(AA'N)$, của MN với $(AB'C')$

Bùi 5: Cho hình tròn $ABCA'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt trung tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC') , (BCA') và (CAB') cắt nhau tại một điểm chung O trên GG' . Tính tỉ số $OG : OG'$

Bùi 6: Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$

a, Chứng minh $mp(BDA') // mp(B'D'C)$

b, Chứng minh đường chéo AC' qua trung tâm $G_1; G_2$ của các tam giác BDA' và $B'D'C$. Chứng minh $G_1; G_2$ chia AC' làm 3 phần bằng nhau

Bùi 7: Chứng minh rằng trong hình hộp, tổng các bình phương của 4 đường chéo bằng tổng bình phương tất cả các cạnh

Bùi 8: Cho hình tròn tam giác $ABCA'B'C'$

a, Gọi I, K, G lần lượt trung tâm của tam giác $ABC; A'B'C'$ và ACC' . Chứng minh $(IGK) // (BB'C'C)$ và $(A'KG) // (AIB')$

b, Gọi M, N lần lượt trung điểm của BB' và CC' . Hãy dùng đường thẳng qua trung tâm tam giác ABC cắt AB' và MN

Bùi 9: Cho hình tròn $ABCA'B'C'$. Gọi M, N lần lượt trung điểm của BC và CC' , P nằm trên trục của C qua A

a, Xác định thiết diện của hình tròn với $mp(A'MN)$

b, Xác định thiết diện của hình tròn với $mp(MNP)$

Bùi 10: Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt trung điểm của $AB, B'C'; DD'$

a, Chứng minh $mp(MNP) // mp(A'B'D)$ và (BDC')

b, Xác định thiết diện của hình lập phương với $mp(MNP)$? Thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện

Bùi 11: Cho hình lập phương $ABCA'B'C'$ cạnh a, $ABB'A', ACC'A'$ là các hình vuông. Gọi I, J lần lượt trung điểm của $ABB'A', ACC'A'$ và O lần lượt trung tâm đường chéo ngoài tiếp tam giác ABC

a, Chứng minh $IJ // mp(ABC)$

b, Xác định thiết diện của hình lập phương với $mp(IJO)$. Chứng minh thiết diện là hình thang cân

ÔN TẬP TỔNG HỢP

Bài 1: Cho hình chập S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi cạnh a; SA = SB = a; SC = SD = $a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB; M là một điểm trên cạnh BC.

1) Xác định thiết diện của hình chập S.ABCD với mặt phẳng (MEF). Thiết diện là hình gì?

2) Đặt BM = x ($0 \leq x \leq a$). Tính FM và diện tích thiết diện theo a và x

$$KQ: S = \frac{3a}{16} \sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}$$

Bài 2: Cho tứ diện ABCD trong đó AB vuông góc với CD và AB = AC = CD = a; M là một điểm trên cạnh AC với AM = x ($0 < x < a$); (α) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD.

1) Xác định thiết diện của tứ diện tạo bởi mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?

2) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Xác định x để diện tích thiết diện này lớn nhất.

$$0 < x < a$$

$$x = \frac{a}{2}$$

Bài 3: Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC đều cạnh a, gọi O là trung điểm của cạnh AC; lấy điểm S ngoài (α) sao cho SA = a và SA \perp BO; (α) là mặt phẳng chứa BO và song song với SA.

1) (α) cắt tứ diện SABC theo thiết diện là hình gì?

2) Tính diện tích thiết diện theo a.

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$$

Bài 4: Cho hình chập S.ABCD của ABCD là hình bình hành với AB = 2a, AD = a. SAB là tam giác vuông tại A. Gọi M là một điểm trên cạnh AD với AM = x ($0 < x < a$). (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB).

1) (α) cắt hình chập theo thiết diện là hình gì?

2) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

$$S = 2(a^2 - x^2)$$

Bài 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, CB. M là một điểm trên đoạn BD, mặt phẳng (IJM) cắt AD tại N.

1) Chứng minh IJMN là hình thang. Xác định vị trí của M để IJMN là hình bình hành.

2) Gọi K là giao điểm của IM và JN. Tìm tập hợp các điểm K khi M di chuyển trên đoạn BD.

Bùi 6: Tõ bên ngoài của hình bình hành ABCD vẽ bên ngoài đường thẳng song song cũng chiều Ax, By, Cz, đường thẳng sao cho chúng cắt một đường (ABCD). Một mặt phẳng (α) cắt bên ngoài đường thẳng đã chọn lần lượt tại A', B', C', D'.

1) Chứng minh: (Ax; By) // (Cz; Dt)

2) Chứng minh tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

3) Gọi O, O' lần lượt tâm của hình bình hành ABCD, A'B'C'D'. Chứng minh đường thẳng OO' // AA' và AA' + CC' = BB' + DD'

Bùi 7: Cho tứ giác ABCD với AB \perp CD, Δ BCD vuông tại C và $\widehat{BDC} = 30^\circ$. M là điểm di động trên cạnh BD, (α) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD.

1) (α) cắt tứ giác ABCD theo một thiết diện là hình gì?

2) Giả sử AB = BD = a, BM = x. Tính diện tích S của thiết diện theo a và x.

3) Vẽ lên đây giả thiết trong câu 2). Xác định x để thiết diện là 2 đường chéo vuông góc.

$$\text{KQ: } 2) S = \frac{\sqrt{3}}{2}x(a-x) \quad 3) x = 2(2 - \sqrt{3}a)$$

Bùi 8: Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình thoi cạnh a, SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc AB, (α) là mặt phẳng qua M song song với (SAD) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q.

1) Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

2) Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp các điểm I khi M chạy từ A đến B.

3) Đặt AM = x. Tính diện tích thiết diện MNPQ theo a và x

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2)$$

Bùi 9: Cho tứ giác đều SABC cạnh a. Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AI, SB. (α) là mặt phẳng qua KL và song song với CI. Tính diện tích thiết diện của (α) với tứ giác.

$$S = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$$

Bùi 10: Cho hình chóp S.ABCD là lăng trụ hình bình hành tâm O.

1) Tõ một điểm M di động trên đoạn SA dùng đường thẳng song song với AD cắt SD tại N, NB cắt SO tại P. Chứng minh MP đi qua một điểm cố định

2) Tràn c¹nh CD lÊy ®iÓm Q sao cho: $\frac{CQ}{CD} = \frac{SM}{SA}$. Chøng minh

MQ lu«n song song vói mét mÆt ph¼ng cè ®Ænh.

3) T×m vÞ trÝ cña M tr¹n SA ®Ó ΔMNQ cã diÖn tÝch lín nhÊt?

Bµi11: Cho h×nh lÛp ph¼ng ABCD.A'B'C'D'; E, F, G lÏn l-ít l¼ trung ®iÓm cña AA', BB', CC'. Chøng minh r»ng:

1) (EFG) // (ABCD)

2) X, c ®Ænh giao tuyÖn cña hai mÆt ph¼ng (ABD) vµ (C'D'D).

3) T×m giao ®iÓm cña A'C vµ (C'DB)

4) Gäi O vµ O' lÏn l-ít l¼ giao ®iÓm cña hai ®-êng chÐo ®Êy ABCD vµ A'B'C'D'. Chøng minh r»ng AO' vµ C'O chia A'C th¼nh ba ®¹on b»ng nhau

Bµi12: Cho tØ diÖn ®Òu ABCD. Gäi G_1, G_2 lÏn l-ít l¼ trong tØm cña ΔABD vµ ΔBCD ; I l¼ trung ®iÓm cña AC.

1) CM: $G_1G_2 // (ABC); G_1G_2 // (ACD)$

2) mÆt ph¼ng (α) ®i qua G_1, G_2 vµ song song vói BC. T×m thiÖt diÖn cña (α) vµ tØ diÖn ABCD. ThiÖt diÖn l¼ h×nh g×? T¹i sao?

3) G l¼ trong tØm cña tØ diÖn ABCD. K l¼ trung ®iÓm cña G_1G_2 . Chøng minh r»ng G, I, K th¼ng h¼ng.

Bµi13: Cho h×nh ch¹p S.ABCD cã ®¼y l¼ h×nh thang m¼ ®¼y lín l¼ c¹nh AD. Mét ®iÓm M bÊt kú tr¹n c¹nh AB vµ mét mÆt ph¼ng (α) qua M vµ // AD vµ SB

1) mÆt ph¼ng (α) c³t h×nh ch¹p S.ABCD theo thiÖt diÖn l¼ h×nh g×?

2) CM: SC // (α).

Bµi14: Cho h×nh hÛp ABCD.A"B'C'D' cã Q l¼ trung ®iÓm c¹nh DD', I l¼ mét ®iÓm tr¹n ®¹n BD sao cho $DI = 3IB$. T×m thiÖt diÖn cña h×nh hÛp ABCD.A"B'C'D' t¹o b³i mÆt ph¼ng (α) qua IQ vµ // AC.

Bµi15: Cho tØ gi, c ABCD n»m trong mp (P). Hai ®-êng th¼ng AB vµ CD c³t nhau t¹i E; AD vµ BC c³t nhau t¹i F. Mét ®iÓm S n»m ngoµi mÆt ph¼ng (P) vµ mét mÆt ph¼ng (Q) di ®éng c³t SA, SB, SC t¹i I, J, K.

1) T×m giao ®iÓm K cña (Q) vµ SD

2) Chøng minh r»ng ®iÒu kiÖn cÇn vµ ®ñ ®Ó IJ // KL l¼ SE // (Q)

3) T×m ®iÒu kiÖn gi÷a SF vµ (Q) ®Ó IL // JK. Chøng minh r»ng nÕu IJKL lu«n l¼ h×nh b×nh h¼ng th× (Q) lu«n song song vói mét mÆt ph¼ng cè ®Ænh

Bài 16: Cho hình vuông ABCD cạnh a và tam giác vuông cân ADF ($AD = AF$) nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Biết $BF = a\sqrt{2}$, trên các đoạn AC, FD lần lượt lấy hai điểm M, N để sao cho: $AM = FN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

- 1) Chứng minh rằng $MM \parallel (ABF)$.
- 2) Chứng minh: $AN = MN = BM$.
- c) Tính thể tích MN theo a và x . Xác định x để MN có thể dài nhất