

Bài tập quan hệ vuông góc trong không gian

Vấn đề 1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, Hai đường thẳng vuông góc

Bài 1. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là hình chiếu của A trên SB, SD.

- a) Chứng minh $MN \parallel BD$ và SC vuông góc với mp(AMN).
- b) Gọi K là giao điểm của SC với mp(AMN). Chứng minh AMKN có hai đường chéo vuông góc.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy. Gọi H, K là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

- SC vuông góc với mp(BHK).
- b) HK vuông góc với mp(SBC).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, biết $SB = SD$.

- a) Chứng minh (SAC) là mp trung trực của đoạn thẳng BD.
- b) Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh $SH = SK, OH = OK$ và $HK \parallel BD$.
- c) Chứng minh (SAC) là mp trung trực của HK.

Bài 4. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng $A'H \perp (ABC)$. Chứng minh rằng:

- a) $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.
- b) Gọi MM' là giao tuyến của hai mp(AHA') và (BCC'B') trong đó $M \in BC$ và $M' \in B'C'$. Chứng minh tứ giác BCC'B' là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

Bài 5. Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mp khác nhau tạo nên tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của BC.

- a) Chứng minh $BC \perp AD$.
- b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Bài 6. Cho hai hình chữ nhật ABCD, ABEF nằm trên hai mp khác nhau sao cho $AC \perp BF$. Gọi CH và FK là hai đường cao của tam giác BCE và ADF. Chứng minh:

- a) ACH và BFK là các tam giác vuông.
- b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

Bài 7. Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác cân tại A với $AB = a, BC = \frac{6a}{5}$. Gọi M là trung

điểm của BC. Vẽ $AH \perp MD$.

- a) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.
- b) Cho $AD = \frac{4a}{5}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.

c) Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh $G_1G_2 \perp (ABC)$.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

- a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$ và $AC \perp SD$.
- b) Gọi I, J là trung điểm của BA, BC. Chứng minh $IJ \perp (SBD)$.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J là trung điểm của AB và CD.

- a) Tính các cạnh của tam giác SIJ và chứng minh $SI \perp (SCD), SJ \perp (SAB)$.
- b) Gọi SH là đường cao của tam giác SIJ. Chứng minh $SH \perp AC$ và tính độ dài SH.
- c) Gọi M là điểm thuộc BD sao cho $BM \perp SA$. Tính AM theo a.

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K là trung điểm của AB, AD.

a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp$ đáy và $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông đường cao $AB = a$, $BC = 2a$. Ngoài ra $SC \perp BD$.

a) Chứng minh tam giác SBC vuông.

b) Tính theo a độ dài đoạn AD .

c) Gọi M là một điểm trên đoạn SA , đặt $AM = x$, với $0 \leq x \leq a$. Tính độ dài đường cao DE của tam giác BDM theo a và x . Xác định x để DE lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ đáy và $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại C với $AB = 2a$, $\angle BAC = 30^\circ$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC , H là hình chiếu của S trên BM .

a) Chứng minh $AH \perp BM$.

b) Đặt $AM = x$, với $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S tới BM theo a và x . Tìm x để khoảng cách này là lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 13. Cho tam giác ABC có $BC = 2a$ và đường cao $AD = a$. Trên đường thẳng vuông góc với $mp(ABC)$ tại A lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E, F là trung điểm SB, SC .

a) Chứng minh $BC \perp (SAD)$.

b) Tính diện tích của tam giác AEF .

Bài 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . cạnh bên $AA' = a$ và vuông góc với đáy.

a) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.

b) Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $AM \perp BC'$.

c) Gọi K là một điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $KB' = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM \perp (MKJ)$.

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (DBC)$ và tam giác ABC vuông tại A . Kẻ $DI \perp BC$.

a) Chứng minh $BC \perp (AID)$.

b) Kẻ $DH \perp AI$. Chứng minh $DH \perp (ABC)$.

c) Đặt $\angle AID = \alpha, \angle ABD = \beta, \angle ACD = \gamma$. Chứng minh $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$.

d) Giả sử $AD = a, \beta = \gamma = 30^\circ$. Tính BC và α .

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA = SB = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

a) Kẻ $SH \perp (ABC)$. Chứng minh H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

b) Tính độ dài SH theo a .

c) Gọi I là trung điểm BC . Chứng minh $BC \perp (SAI)$.

d) Gọi φ là góc giữa SA và SH . Tính φ .

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, M là trung điểm của SC và AB . Cho $SA = a$.

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh $IO \perp (ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến CM .

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , $SA \perp (ABCD)$.

a) Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SD . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

b) Kẻ $AJ \perp (SBD)$. Chứng minh J là trực tâm của tam giác SBD .

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp$ đáy, tam giác ABC cân tại B . Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$. Chứng minh

- a) Chứng minh $CC' \perp (MBD)$.
 b) Gọi K là hình chiếu của H trên AB. Chứng minh K là trực tâm của tam giác BCD.

Vấn đề 2. Hai mặt phẳng vuông góc.

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$. Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mp(ACD) vẽ $DK \perp AC$. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

- a) Chứng minh $(ACD) \perp (ABE)$ và $(ACD) \perp (DFK)$.
 b) Chứng minh $OH \perp (ACD)$.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, có cạnh bằng a và đường chéo $BD = a$. $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABCD). Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có các mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với (ABCD). Biết ABCD là hình vuông và $SA = AB$. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh:

- a) $(SAC) \perp (SBD)$. b) $(SAD) \perp (SCD)$. c) $(SCD) \perp (ABM)$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $BC = 2AB$. Tam giác SAB đều và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB. Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a và $SA = SB = SC = a$.

- a) Chứng minh $(SBD) \perp (ABCD)$. b) Chứng minh tam giác SBD vuông.

Bài 6. Cho tam giác ACD và BCD nằm trong hai mp vuông góc với nhau. $AC = BC = BD = a$ và $CD = 2x$. Gọi I, J là trung điểm của AB, CD.

- a) Chứng minh $IJ \perp AB$ và CD .
 b) Tính AB và IJ theo a và x.
 c) Xác định x để $(ABC) \perp (ABD)$.

Bài 7. Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông tại B và $AD \perp (ABC)$. Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.

- a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAC)$. b) Chứng minh $(ABI) \perp (SBC)$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với mp(ABC).

- a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.
 b) Gọi AH, AK là đường cao của các tam giác ABC và $AB'C'$. Chứng minh hai mp $(BCC'B')$ và $(AB'C')$ cùng vuông góc với mp(AHK).

Bài 10. Cho tứ diện ABCD có $AB = BC = a$, $AC = b$, $DB = DC = x$, $AD = y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để:

- a) $(ABC) \perp (BCD)$. b) $(ABC) \perp (ACD)$.

Bài 11. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh:

- a) $(SAB) \perp (SAC)$. b) $(SBC) \perp (SAD)$.

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp$ đáy. Gọi M, N là hai điểm thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = x$, $DN = y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, x và y để $(SAM) \perp (SMN)$.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại B. Đoạn thẳng $AD \perp (ABC)$. Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$.

Vẽ đường cao AH của tam giác ABD, chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Chứng minh:

(ABCD) \perp (SBD).

b) Tam giác SBD vuông tại S.

Bài 15. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Chứng minh $AC' \perp (A'BD)$ và $(ACC'A') \perp (A'BD)$.

Bài 16. Cho tứ diện S.ABC có $SA \perp$ đáy. Gọi H, K là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh:

a) (SAC) \perp (BHK).

b) (SBC) \perp (BHK).

Bài 17. Cho tứ diện SABC có ba đỉnh A, B, C tạo thành tam giác vuông cân đỉnh B và $AC = 2a$, có cạnh $SA \perp mp(ABC)$ và $SA = a$.

a) Chứng minh (SAB) \perp (SBC).

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

c) Tính độ dài đoạn AH.

d) Từ trung điểm O của đoạn AC vẽ $OK \perp (SBC)$. Tính độ dài đoạn OK.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O và có cạnh $SA \perp$ đáy. Giả sử (α) là mp qua A và vuông góc với cạnh SC, (α) cắt SC tại I.

a) Xác định giao điểm K của SO với mp (α) .

b) Chứng minh (SBD) \perp (SAC) và $BD // (\alpha)$.

Bài 19. Cho hình vuông ABCD. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với đáy.

a) Chứng minh (SAB) \perp (SAD) và (SAB) \perp (SBC).

b) Tính góc giữa hai mp (SAD) và (SBC).

c) Gọi H, I là trung điểm của AB, BC. Chứng minh (SHC) \perp (SDI).

Bài 20. Cho tứ diện ABCD có $AD \perp (DBC)$. Gọi AE, BF là các đường cao của tam giác ABC; H, K là trực tâm của các tam giác ABC và DBC. Chứng minh:

a) (ADE) \perp (ABC) và (BFK) \perp (ABC).

b) $HK \perp (ABC)$.

Bài 21. Trong mp(P), cho hình thoi ABCD với $AB = a$, $AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mp(P) tại giao điểm O của hai đường chéo AC và BD, lấy điểm S sao cho $SB = a$. Chứng minh:

a) Tam giác ASC vuông.

b) (SAB) \perp (SAD).

Bài 22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, hai đáy là $AD = 2a$, $BC = a$. Biết $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp$ đáy.

a) Chứng minh (SAC) \perp (SDC).

b) Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(P) chứa AB và vuông góc với mp(SDC). Tính diện tích thiết diện theo a.

Bài 23. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp$ đáy, đáy ABCD là hình chữ nhật. Hạ $AH \perp SB$, $AK \perp SD$. Chứng minh:

a) (SBC) \perp (SAB).

b) (AHK) \perp (SAC).

- b) Kẻ $HI \perp AB$, $HK \perp AC$. Tứ giác AIHK có đặc điểm gì?
 c) Chứng minh $(SHI) \perp (SAB)$ và $(SHK) \perp (SAC)$.
 d) Kẻ $HM \perp SI$, $HN \perp SK$. Chứng minh $HM \perp (SAB)$ và $HN \perp (SAC)$.

Bài 35. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm O, $AB < BC$, $AB = a$. Hai mp(SAD) và (SAB) cùng vuông góc với đáy.

Chứng minh $SA \perp (ABCD)$.

Chứng minh $(CSB) \perp (SAB)$.

Đặt $\angle SCA = \alpha$, $\angle BSC = \beta$. Chứng minh $SC^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$.

Bài 36. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, các cạnh đáy có độ dài bằng a, M, N là trung điểm của SB, SC. Biết $(AMN) \perp (SBC)$. Tính theo a diện tích tam giác AMN.

Bài 37. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Hai mp(ASB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy.

Chứng minh $SA \perp (ABCD)$.

Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

Cho $SA = 2a$. Kẻ $AH \perp (SBC)$. Tính AH?

Bài 38. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp$ đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

Gọi M là một điểm thuộc đoạn AO sao cho $AM = x$, $0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- a) Gọi H là hình chiếu của M trên (SBC). Tính MH.
 b) $Mp(P) \perp AC$ tại M cắt hình chóp theo một đa giác. Trình bày cách dựng thiết diện này.
 c) Tìm x để diện tích đa giác lớn nhất.