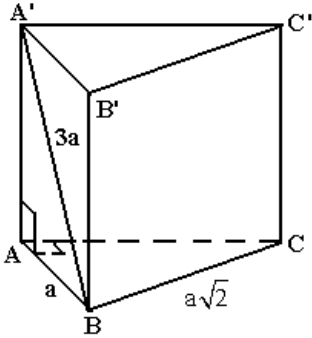


THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

Dạng 1: Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy

Ví dụ 1: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:

Ta có

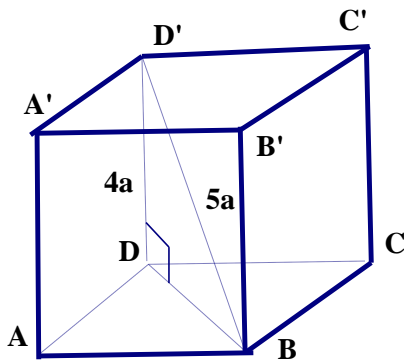
$\square ABC$ vuông cân tại A nên $AB = AC = a$
 $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$

$\square AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$

$\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$

Vậy $V = B.h = S_{ABC} .AA' = a^3\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này



Lời giải:

$ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên

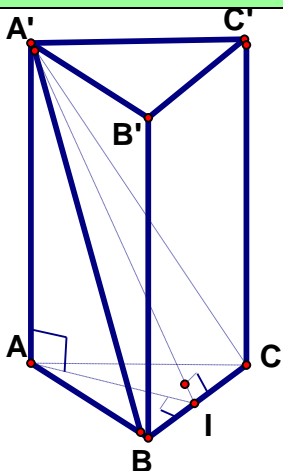
$BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

Suy ra $B = S_{ABCD} = \frac{9a^2}{4}$

Vậy $V = B.h = S_{ABCD} .AA' = 9a^3$

Ví dụ 3: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a = 4$ và biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8 . Tính thể tích khối lăng trụ.



+ Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h

trong hình là các đối tượng nào ?

+ Tìm diện tích $B = S_{ABC}$ bằng công thức nào ?

+ Từ diện tích $\square A'BC$ suy ra cạnh nào ? tại sao ?

+ Tìm $h = AA'$ dùng tam giác nào và định lý gì ?

Lời giải:

Gọi I là trung điểm BC . Ta có $\square ABC$ đều nên

$AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ & $AI \perp BC \Rightarrow A'I \perp BC$ (dl3 ⊥)

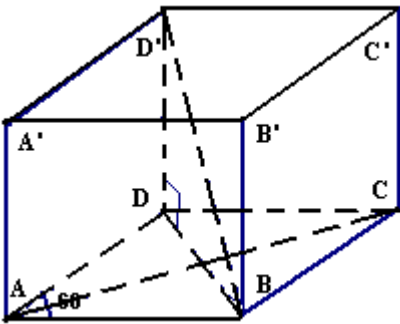
$S_{A'BC} = \frac{1}{2}BC.A'I \Rightarrow A'I = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$

$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI \Rightarrow AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} .AA' = 8\sqrt{3}$

Ví dụ 4: Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60° . Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích hình hộp.

- + Phân tích $V = B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- + Tìm diện tích B của hình thoi $ABCD$ bằng cách nào ?
- + Tìm $h = DD'$ trong tam giác vuông nào ? và định lý gì ?



Lời giải:

Ta có tam giác ABD đều nên : $BD = a$

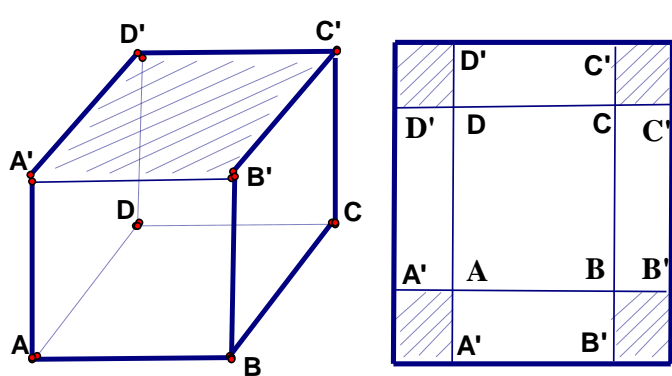
và $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Theo đề bài $BD' = AC = 2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\square DD'B \Rightarrow DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Ví dụ 5: Một tấm bìa hình vuông có cạnh 44 cm, người ta cắt bỏ đi ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12 cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Tính thể tích cái hộp này.



- + Phân tích $V = B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- + Tìm $h = AA'$? Tại sao ?
- + Tìm AB ? Suy ra $B = S_{ABCD} = AB^2$?

Giải

Theo đề bài, ta có $AA' = BB' = CC' = DD' = 12$ cm nên $ABCD$ là hình vuông có $AB = 44$ cm - 24 cm = 20 cm và chiều cao hộp $h = 12$ cm

Vậy thể tích hộp là $V = S_{ABCD} \cdot h = 4800 \text{ cm}^3$

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều biết rằng tất cả các cạnh của lăng trụ bằng a . Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của lăng trụ.

ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; $S = 3a^2$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là tứ giác đều cạnh a biết rằng $BD' = a\sqrt{6}$. Tính thể tích của lăng trụ.

Đs: $V = 2a^3$

Bài 3: Lăng trụ đứng tứ giác có đáy là hình thoi mà các đường chéo là 6cm và 8cm biết rằng chu vi đáy bằng 2 lần chiều cao lăng trụ. Tính thể tích và tổng diện tích các mặt của lăng trụ.

Đs: $V = 240 \text{ cm}^3$ và $S = 248 \text{ cm}^2$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng tam giác có độ dài các cạnh đáy là 37cm ; 13cm ; 30cm và biết tổng diện tích các mặt bên là 480 cm^2 . Tính thể tích lăng trụ.

Đs: $V = 1080 \text{ cm}^3$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , biết rằng chiều cao lăng trụ là $3a$ và mặt bên $AA'B'B$ có đường chéo là $5a$. Tính thể tích lăng trụ.

Đs: $V = 24a^3$

Bài 6: Cho lăng trụ đứng tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và biết tổng diện tích các mặt của lăng trụ bằng 96 cm^2 . Tính thể tích lăng trụ.

Đs: $V = 64 \text{ cm}^3$

Bài 7: Cho lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy là 19, 20, 37 và chiều cao của khối lăng trụ bằng trung bình cộng các cạnh đáy. Tính thể tích của lăng trụ.

Đs: $V = 2888$

Bài 8: Cho khối lập phương có tổng diện tích các mặt bằng 24 m^2 . Tính thể tích khối lập phương

Đs: $V = 8 \text{ m}^3$

Bài 9: Cho hình hộp chữ nhật có 3 kích thước tỉ lệ thuận với 3, 4, 5 biết rằng độ dài một đường chéo của hình hộp là 1 m. Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

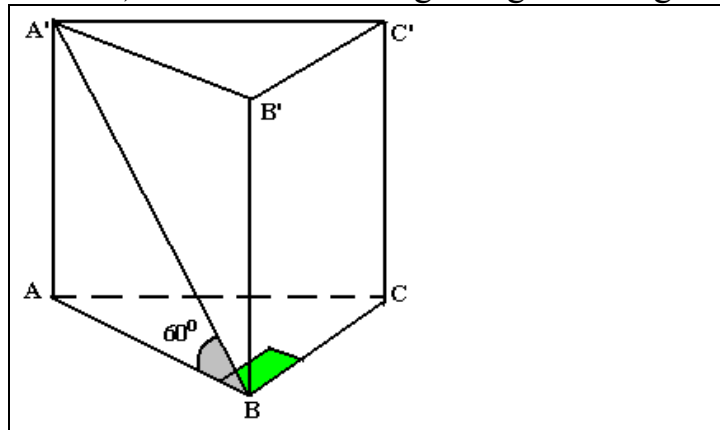
Đs: $V = 0,4 \text{ m}^3$

Bài 10. Cho hình hộp chữ nhật biết rằng các đường chéo của các mặt lần lượt là $\sqrt{5}; \sqrt{10}; \sqrt{13}$. Tính thể tích khối hộp này. **Đs:** $V = 6$

Dạng 2: Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

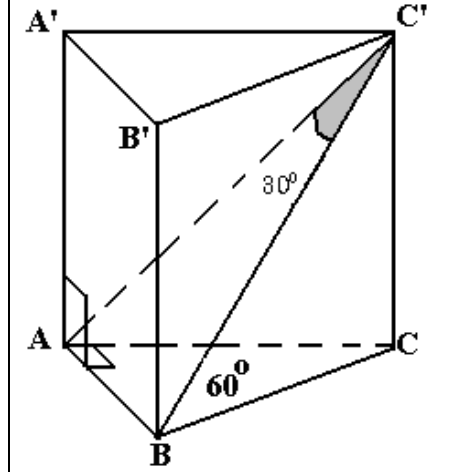
- *) Tìm hình chiếu của $A'B$ trên đáy ABC . Suy ra góc $[A'B, (ABC)] = ?$
- *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của tam giác ABC bằng công thức nào ?
- *) Tìm $h = AA'$ trong tam giác vuông nào ? và dùng hệ thức lượng giác nào ?



Lời giải:
 Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$ & AB là hình chiếu của $A'B$ trên đáy ABC .
 Vậy góc $[A'B, (ABC)] = \angle ABA' = 60^\circ$
 $\square \angle ABA' \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$
 Vậy $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a$, $\angle ACB = 60^\circ$ biết BC' hợp với $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính AC' và thể tích lăng trụ.

- Phân tích**
- *) Tìm hình chiếu của BC' trên $(AA'C'C)$. Suy ra góc $[BC', (AA'C'C)] = ?$
 - *) Tìm AC' trong tam giác nào? Dùng hệ thức lượng giác gì ?
 - *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
 - *) Tìm diện tích B của tam giác ABC bằng công thức nào ?
 - *) Tìm $h = AA'$ trong tam giác vuông nào ? và dùng hệ thức lượng giác nào ?

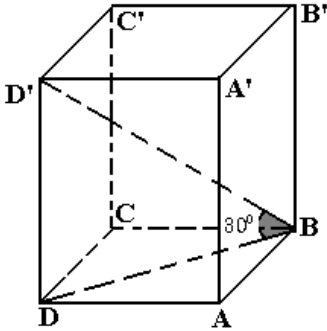


Lời giải:
 $\square \angle ABC \Rightarrow AB = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
 Ta có: $AB \perp AC; AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$
 nên AC' là hình chiếu của BC' trên $(AA'C'C)$.
 Vậy góc $[BC'; (AA'C'C)] = \angle BC'A = 30^\circ$
 $\square \angle BC'A \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = 3a$
 $V = B.h = S_{ABC} \cdot AA'$
 $\square \angle AA'C' \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2a\sqrt{2}$
 $\square \angle ABC$ là nửa tam giác đều nên $S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. Vậy $V = a^3 \sqrt{6}$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy $ABCD$ một góc 30° . Tính thể tích và tổng diện tích của các mặt bên của lăng trụ.

- Phân tích**
- *) Dựng hình vuông $ABCD$ hay $A'B'C'D'$ và các cạnh bên của hình lăng trụ.
 - *) Dựng BD' và BD ?
- phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:**
- *) Tìm hình chiếu của BD' trên đáy $ABCD$. Suy ra góc $[BD', (ABCD)] = ?$
 - *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
 - *) Tìm diện tích B của hình vuông $ABCD$ bằng công thức nào ?

*) Tìm $h = DD'$ trong tam giác vuông nào ? và dùng hệ thức lượng giác nào ?

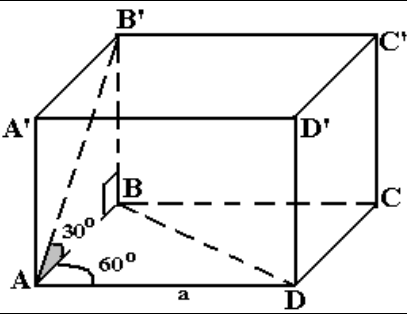


Giải: Ta có $ABCD A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên ta có:
 $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp BD$ và BD là hình chiếu của BD' trên $ABCD$.
 Vậy góc $[BD';(ABCD)] = \angle DBD' = 30^\circ$
 $\square BDD' \Rightarrow DD' = BD \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
 Vậy $V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{3} S = 4S_{ADD'A'} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 4: Cho hình hộp đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\angle BAD = 60^\circ$ biết AB' hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° . Tính thể tích của hình hộp.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Tìm hình chiếu của AB' trên $(ABCD)$. Suy ra góc $[AB';(ABCD)] = ?$
- *) Phân tích $V = B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Dựng BD . Suy ra $\triangle ABD$ có hình tính gì ? Suy ra diện tích B của $ABCD$ bằng cách nào?
- + Tính $h = BB'$ trong tam giác nào ? Dùng hệ thức lượng giác nào ?



Giải $\square ABD$ đều cạnh $a \Rightarrow S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
 $\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
 $\square ABB'$ vuông tại $B \Rightarrow BB' = AB \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$
 Vậy $V = B \cdot h = S_{ABCD} \cdot BB' = \frac{3a^3}{2}$

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC vuông cân tại B biết $A'C = a$ và $A'C$ hợp với mặt bên $(AA'B'B)$ một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ ĐS: $V = a^3\sqrt{2}/16$

Bài 2. Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại B biết $BB' = AB = a$ và $B'C$ hợp với đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ. ĐS: $V = a^3\sqrt{3}/2$

Bài 3. Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết AB' hợp với mặt bên $(BCC'B')$ một góc 30° . Tính độ dài AB' và thể tích lăng trụ. ĐS: $AB' = a\sqrt{3}; V = a^3\sqrt{3}/2$

Bài 4. Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại A biết $AC = a$ và $\angle ACB = 60^\circ$ biết BC' hợp với mặt bên $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ và diện tích tam giác ABC' . ĐS $V = a^3\sqrt{6}; S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Bài 5. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng a và AA' hợp với mặt phẳng $(A'BC)$ một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ ĐS: $V = 32a^3/9$

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có đường chéo $A'C = a$ và biết rằng $A'C$ hợp với $(ABCD)$ một góc 30° và hợp với $(ABB'A')$ một góc 45° . Tính thể tích của khối hộp chữ nhật. Đs: $V = a^3\sqrt{2}/8$

Bài 7. Cho hình hộp đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi O là tâm của $ABCD$ và $OA' = a$ Tính thể tích của khối hộp khi:

- 1) $ABCD A'B'C'D'$ là khối lập phương. ĐS $V = 2a^3\sqrt{6}/9$
- 2) OA' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° . ĐS $V = a^3\sqrt{3}/4$
- 3) $A'B$ hợp với $(AA'CC')$ một góc 30° . ĐS $V = 4a^3\sqrt{3}/9$

Bài 8. Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $BD' = a$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) BD' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° . ĐS $V = a^3\sqrt{3}/16$
- 2) BD' hợp với mặt $(AA'D'D)$ một góc 30° . ĐS $V = a^3\sqrt{2}/8$

Bài 9. Chiều cao của lăng trụ tứ giác đều bằng a và góc của 2 đường chéo phát xuất từ một đỉnh của 2 mặt bên kề nhau là 60° . Tính thể tích lăng trụ và tổng diện tích các mặt của lăng trụ. Đs: $V = a^3$ và $S = 6a^2$

Bài 10. Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có $AB = a$; $AD = b$; $AA' = c$ và $BD' = AC' = CA' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

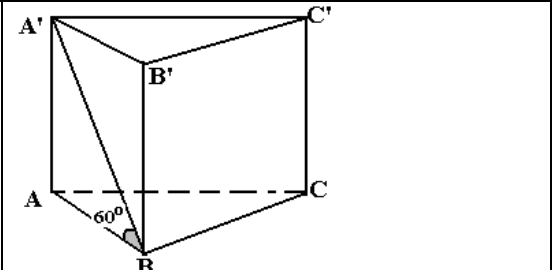
- 1) Chứng minh ABCD A'B'C'D' là hộp chữ nhật.
- 2) Gọi x,y,z là góc hợp bởi một đường chéo và 3 mặt cùng đi qua một đỉnh thuộc đường chéo. Chứng minh rằng $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1$.

Dạng 3: Lăng trụ đứng có góc giữa 2 mặt phẳng

Ví dụ 1. Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết (A'BC) hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

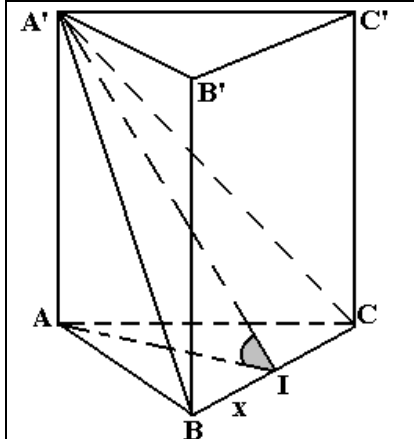
- Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:**
- *) Nhận xét AB và A'B có vuông góc với BC không? tại sao?
 - *) Suy ra góc[(A'BC);(ABC)] = ?
 - *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?
 - *) Tìm diện tích B của tam giác ABC bằng công thức nào?
 - *) Tìm h = AA' trong tam giác vuông nào? và dùng hệ thức lượng giác nào?

Lời giải:
 Ta có $A'A \perp (ABC) \& BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$
 Vậy góc[(A'BC), (ABC)] = $\angle ABA' = 60^\circ$
 $\square ABA' \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$ Vậy $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$



Ví dụ 2: Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều. Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30° và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

- Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:**
- *) Nhận xét $\square A'BC$ có hình tính gì? Suy ra I là trung điểm của BC cho ta vị trí AI và A'I thế nào với BC? Suy ra góc[(A'BC);(ABC)] = ?
 - *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?
 - *) Đặt $BC = 2x$. Suy ra A'I bởi tam giác nào?
 - *) Từ diện tích tam giá A'BC suy ra x bởi công thức nào?
 - *) Tìm h = AA' trong tam giác vuông nào? và dùng hệ thức lượng giác nào?



Giải. $\square ABC$ đều $\Rightarrow AI \perp BC$ mà $AA' \perp (ABC)$ nên $A'I \perp BC$ (đl 3 \perp).
 Vậy góc[(A'BC);(ABC)] = $\angle A'IA = 30^\circ$
 Giả sử $BI = x \Rightarrow AI = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$. Ta có
 $\Delta A'AI : A'I = AI : \cos 30^\circ = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$
 $A'A = AI \cdot \tan 30^\circ = x\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = x$
 Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CI \cdot AI \cdot A'A = x^3 \sqrt{3}$
 Mà $S_{A'BC} = BI \cdot A'I = x \cdot 2x = 8 \Rightarrow x = 2$. Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}$

Ví dụ 3. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy (ABCD) một góc 60° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

- Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:**
- *) Xác định góc[(BDC');(ABCD)] = ?
 - *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?
 - *) Tìm diện tích B của ABCD bằng công thức nào?
 - *) Tìm h = CC' trong tam giác vuông nào? và dùng hệ thức lượng giác nào?

	<p>Giải. Gọi O là tâm của ABCD . Ta có ABCD là hình vuông nên $OC \perp BD$ $CC' \perp (ABCD)$ nên $OC' \perp BD$ (đl 3 \perp). Vậy góc $[(BDC');(ABCD)] = \angle COC' = 60^\circ$ Ta có $V = B.h = S_{ABCD}.CC'$ ABCD là hình vuông nên $S_{ABCD} = a^2$ $\square OCC'$ vuông nên $CC' = OC.tan60^\circ = a\sqrt{6}/2$ Vậy $V = a^3\sqrt{6}/2$</p>
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có $AA' = 2a$; mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy (ABCD) một góc 60° và A'C hợp với đáy (ABCD) một góc 30° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

- Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:**
- *) Nhận xét AB và A'B có vuông góc với BC không ? tại sao?
 - *) Suy ra góc $[(A'BC);(ABCD)] = ?$
 - *) Tìm hình chiếu của A'C trên (ABCD) ? Suy ra góc $[A'C,(ABCD)] = ?$
 - *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
 - *) Tìm diện tích B của ABCD bằng công thức nào ?
 - *) Tìm AB và AC bởi tam giác vuông nào? Dùng hệ thức lượng giác nào ?
 - *) Tìm h = AA' trong tam giác vuông nào ? và dùng hệ thức lượng giác nào ?

	<p>Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của A'C trên (ABCD) . Vậy góc $[A'C,(ABCD)] = \angle A'CA = 30^\circ$ $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$ (đl 3 \perp) . $\therefore [(A'BC),(ABCD)] = \angle A'BA = 60^\circ$ $\square A'AC \Rightarrow AC = AA'.\cot30^\circ = 2a\sqrt{3}$ $\square A'AB \Rightarrow AB = AA'.\cot60^\circ = 2a\sqrt{3}/3$ $\square ABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 4a\sqrt{6}/3$ Vậy $V = AB.BC.AA' = 16a^3\sqrt{2}/3$</p>
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

- Bài 1.** Cho hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có $AA' = a$ biết đường chéo A'C hợp với đáy ABCD một góc 30° và mặt (A'BC) hợp với đáy ABCD một góc 60° . Tính thể tích hộp chữ nhật. Đs: $V = 2a^3\sqrt{2}/3$
- Bài 2.** Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông và cạnh bên bằng a biết rằng mặt (ABC'D') hợp với đáy một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ. Đs: $V = 3a^3$
- Bài 3.** Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$ biết rằng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 45° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = a^3\sqrt{2}$
- Bài 4.** Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = a$ và $\angle BAC = 120^\circ$ biết rằng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 45° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = a^3\sqrt{3}/8$
- Bài 5.** Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BB' = AB = h$ biết rằng (B'AC) hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = h^3\sqrt{2}/4$
- Bài 6.** Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC đều biết cạnh bên $AA' = a$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:
- 1) Mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 60° . Đs: $V = a^3\sqrt{3}$
 - 2) A'B hợp với đáy ABC một góc 45° . Đs: $V = a^3\sqrt{3}/4$
 - 3) Chiều cao kẻ từ A' của tam giác A'BC bằng độ dài cạnh đáy của lăng trụ. Đs: $V = a^3\sqrt{3}$
- Bài 7.** Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh bên $AA' = 2a$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:
- 1) Mặt (ACD') hợp với đáy ABCD một góc 45° . Đs : $V = 16a^3$
 - 2) BD' hợp với đáy ABCD một góc 60° . Đs : $V = 12a^3$
 - 3) Khoảng cách từ D đến mặt (ACD') bằng a . Đs : $V = 16a^3/3$
- Bài 8.** Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:
- 1) Mặt phẳng (BDC') hợp với đáy ABCD một góc 60° Đs : $V = a^3\sqrt{6}/2$.
 - 2) Tam giác BDC' là tam giác đều. Đs : $V = a^3$

3) AC' hợp với đáy $ABCD$ một góc 45°

$$\text{ĐS : } V = a^3\sqrt{2}$$

Bài 9. Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc nhọn $A = 60^\circ$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

1) (BDC') hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° . $\text{ĐS: } V = 3a^3\sqrt{3}/4$

2) Khoảng cách từ C đến (BDC') bằng $a/2$ $\text{ĐS : } V = 3a^3\sqrt{2}/8$

3) AC' hợp với đáy $ABCD$ một góc 45° $\text{ĐS : } V = 3a^3/2$

Bài 10. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có $BD' = 5a$, $BD = 3a$. Tính thể tích khối hộp trong các trường hợp sau đây:

1) $AB = a$

$$\text{ĐS : } V = 8a^3\sqrt{2}$$

2) BD' hợp với $AA'D'D$ một góc 30°

$$\text{ĐS : } V = 5a^3\sqrt{11}$$

3) (ABD') hợp với đáy $ABCD$ một góc 30°

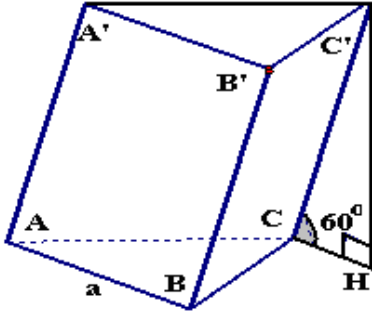
$$\text{ĐS : } V = 16a^3$$

Dạng 4. Khối lăng trụ xiên

Ví dụ 1. Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Xác định góc giữa cạnh bên với đáy : Hình chiếu của CC' trên (ABC) là gì?
- *) Suy ra góc[CC';(ABC)] = ?
- *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của tam giác ABC bằng công thức nào ?
- *) Tìm h = CC' trong tam giác vuông nào ? và dùng hệ thức lượng giác nào ?



Lời giải:

Ta có $C'H \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của CC' trên (ABC)

Vậy góc[CC',(ABC)] = $C'CH = 60^\circ$

$$\square CHC' \Rightarrow C'H = CC' \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

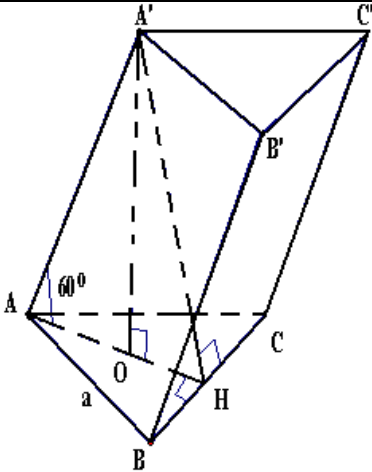
$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } V = S_{ABC} \cdot C'H = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$

Ví dụ 2. Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60° .

- 1) Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật.
- 2) Tính thể tích lăng trụ.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Xác định góc giữa cạnh bên AA' với đáy ABC :
Hình chiếu của AA' trên (ABC) là gì? Suy ra góc[AA';(ABC)] = ?
- *) Chứng minh $BC \perp AA'$ bằng cách Chứng minh $BC \perp$ mặt phẳng nào ? Từ đó có thể $BC \perp CC'$ không ? tại sao? Vậy BB'C'C là hình gì?
- *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của tam giác ABC bằng công thức nào ?
- *) Tìm h = AA' trong tam giác vuông nào ? và dùng hệ thức lượng giác nào ?



Lời giải:

1) Ta có $A'O \perp (ABC) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của AA' trên (ABC)

Vậy góc[AA',(ABC)] = $OAA' = 60^\circ$

Ta có BB'CC' là hình bình hành (vì mặt bên của lăng trụ)

$AO \perp BC$ tại trung điểm H của BC nên $BC \perp A'H$ (đl 3 \perp)

$\Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ mà $AA' // BB'$ nên $BC \perp BB'$. Vậy BB'CC' là hình chữ nhật.

$$2) \square ABC \text{ đều nên } AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

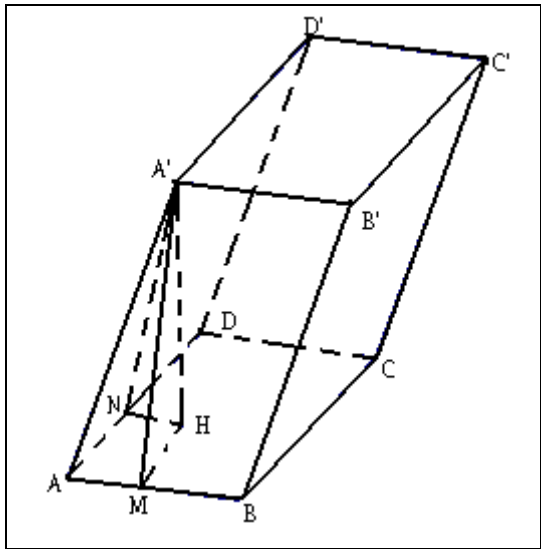
$$\square AOA' \Rightarrow A'O = AO \tan 60^\circ = a$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Ví dụ 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$ $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Xác định góc giữa mặt bên với đáy. Dựng đường cao A'H và $HN \perp AD$
 $HM \perp AB$ Suy ra góc[(ABB'A');(ABCD)] = ? góc[(ADD'A');(ABCD)] = ?
- *) Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABCD bằng công thức nào ?
- *) Tìm h = A'H không dùng trực tiếp tam giác vuông nào được ? Đặt $x = A'H$
- *) Dùng hai tam giác nào bởi định lý gì để tạo ra phương trình theo x ?



Lời giải:

Kẻ $A'H \perp (ABCD)$, $HM \perp AB$, $HN \perp AD$

$\Rightarrow A'M \perp AB$, $A'N \perp AD$ (đl 3 \perp)

$\Rightarrow A'MH = 45^\circ$, $A'NH = 60^\circ$

Đặt $A'H = x$. Khi đó $A'N = x : \sin 60^\circ = 2x/\sqrt{3}$

$$AN = \sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} = HM$$

Mà $HM = x \cdot \cot 45^\circ = x$

$$\text{Nghĩa là } x = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3/7} = 3$$

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có các cạnh đáy là 13;14;15 và biết cạnh bên bằng $2a$ hợp với đáy ABC một góc 45° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = a^3\sqrt{2}$

Bài 2. Cho lăng trụ $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và biết cạnh bên bằng 8 hợp với đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = 336$

Bài 3. Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = b; AA' = c$ và $BAD = 30^\circ$ và biết cạnh bên AA' hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = abc\sqrt{3}/4$

Bài 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều A, B, C biết $AA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = a^3\sqrt{3}/4$

Bài 5. Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , đỉnh A' có hình chiếu trên (ABC) nằm trên đường cao AH của tam giác ABC biết mặt bên $BB'C'C$ hợp với đáy ABC một góc 60° .

1) Chứng minh rằng $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

2) Tính thể tích lăng trụ $ABC A'B'C'$.

Đs: $V = 3a^3\sqrt{3}/8$

Bài 6. Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều với tâm O . Cạnh b $CC' = a$ hợp với đáy ABC 1 góc 60° và C' có hình chiếu trên ABC trùng với O .

1) Chứng minh rằng $AA'B'B$ là hình chữ nhật. Tính diện tích $AA'B'B$.

Đs: $S = a^2\sqrt{3}/2$

2) Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

Đs: $V = 3a^3\sqrt{3}/8$

Bài 7. Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết chân đường vuông góc hạ từ A' trên ABC trùng với trung điểm của BC và $AA' = a$.

1) Tìm góc hợp bởi cạnh bên với đáy lăng trụ.

Đs: 30° .

2) Tính thể tích lăng trụ

Đs: $V = a^3\sqrt{3}/8$

Bài 8. Cho lăng trụ xiên $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều với tâm O . Hình chiếu của C' trên (ABC) là O . Tính thể tích của lăng trụ biết rằng khoảng cách từ O đến CC' là a và 2 mặt bên $AA'C'C$ và $BB'C'C$ hợp với nhau một góc 90°

Đs: $V = 27a^3/4\sqrt{2}$

Bài 9. Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình thoi cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' trên $(ABCD)$ nằm trong hình thoi, các cạnh xuất phát từ A của hộp đôi một tạo với nhau một góc 60° .

1) Chứng minh rằng H nằm trên đường chéo AC của $ABCD$.

2) Tính diện tích các mặt chéo $ACC'A'$ và $BDD'B'$.

Đs: $S_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}; S_{BDD'B'} = a^2$

3) Tính thể tích của hộp.

Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Bài 10. Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $A = 60^\circ$ chân đường vuông góc hạ từ B' xuống $ABCD$ trùng với giao điểm 2 đường chéo đáy biết $BB' = a$.

1) Tìm góc hợp bởi cạnh bên và đáy.

Đs: 60°

2) Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của hình hộp.

Đs: $V = 3a^3/4$ & $S = a^2\sqrt{15}$

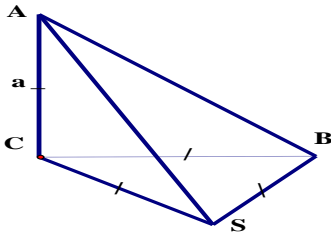
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Dạng 1: Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Ví dụ 1. Cho hình chóp SABC có $SB = SC = BC = CA = a$. Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính thể tích hình chóp.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của SBC bằng công thức nào ?



Lời giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} (ABC) \perp (SBC) \\ (ASC) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBC)$$

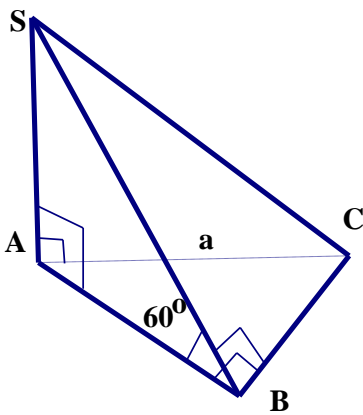
$$\text{Do đó } V = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot AC = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60° .

- 1) Chứng minh các mặt bên là tam giác vuông.
- 2) Tính thể tích hình chóp.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Xác định góc $[SB, (ABC)] = ?$ Tại sao?
- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào? Tính BA ?
- *) Tìm $h = SA$ qua tam giác nào bởi công thức gì ?



Lời giải:

1) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \text{ \& } SA \perp AC$

mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ (đl 3 \perp).

Vậy các mặt bên chóp là tam giác vuông.

2) Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC).

Vậy góc $[SB, (ABC)] = \angle SAB = 60^\circ$.

$\square ABC$ vuông cân nên $BA = BC = a/\sqrt{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{4}; \square SAB \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{24}$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích hình chóp.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Xác định góc $[(SBC), (ABC)] = ?$ Tại sao?
- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào ?
- *) Tìm $h = SA$ qua tam giác nào và công thức gì ?

	<p>Lời giải: M là trung điểm của BC, vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow SA \perp BC$ (đl3 \perp). $\therefore [(SBC);(ABC)] = \text{SMA} = 60^\circ$. Ta có $V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA$ $\square \text{SAM} \Rightarrow SA = AM \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$ Vậy $V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$</p>
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ví dụ 4. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° .
 1) Tính thể tích hình chóp SABCD.
 2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Phân tích đề bài để dựng hình :
 *) Dựng tứ giác ABCD và cạnh bên $SA \perp (ABCD)$?
Hướng dẫn học sinh phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:
 *) Xác định góc $[(SCD);(ABCD)] = ?$ Tại sao?
 *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
 *) Tìm diện tích B của ABCD bằng công thức nào ?
 *) Tìm h = SA qua tam giác nào bởi công thức gì ?

	<p>Lời giải: 1) Ta có $SA \perp (ABC)$ và $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$ (đl3 \perp). (1) Vậy góc $[(SCD);(ABCD)] = \text{SDA} = 60^\circ$. $\square \text{SAD}$ vuông nên $SA = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ Vậy $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 a\sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$ 2) Ta dựng $AH \perp SD$, vì $CD \perp (SAD)$ (do (1)) nên $CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$ Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SCD). $\square \text{SAD} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$. Vậy $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$</p>
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với (SAB) một góc 30° . Tính thể tích hình chóp. **Đs:** $V = a^3 \sqrt{2} / 6$

Bài 2. Cho hình chóp SABC có SA vuông góc với đáy (ABC) và $SA = h$, biết rằng tam giác ABC đều và mặt (SBC) hợp với đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích khối chóp SABC **Đs:** $V = h^3 \sqrt{3} / 3$

Bài 3. Cho hình chóp SABC có đáy ABC vuông tại A và SB vuông góc với đáy ABC biết $SB = a, SC$ hợp với (SAB) một góc 30° và (SAC) hợp với (ABC) một góc 60° . Chứng minh rằng $SC^2 = SB^2 + AB^2 + AC^2$ Tính thể tích hình chóp. **Đs:** $V = a^3 \sqrt{3} / 27$

Bài 4: Cho tứ diện ABCD có $AD \perp (ABC)$ biết $AC = AD = 4 \text{ cm}, AB = 3 \text{ cm}, BC = 5 \text{ cm}$.

- 1) Tính thể tích ABCD. **Đs:** $V = 8 \text{ cm}^3$
- 2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). **Đs:** $d = 12 / \sqrt{34}$

Bài 5: Cho khối chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, $\text{BAC} = 120^\circ$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp SABC. **Đs:** $V = a^3 / 9$

Bài 6: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông biết $SA \perp (ABCD), SC = a$ và SC hợp với đáy một góc 60° Tính thể tích khối chóp. **Đs:** $V = a^3 \sqrt{3} / 48$

Bài 7: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật biết rằng $SA \perp (ABCD)$, SC hợp với đáy một góc 45° và $AB = 3a$, $BC = 4a$. Tính thể tích khối chóp. **Đs:** $V = 20a^3$

Bài 8: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc nhọn A bằng 60° và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng khoảng cách từ A đến cạnh SC = a. Tính thể tích khối chóp SABCD. **Đs:** $V = a^3\sqrt{2}/4$

Bài 9: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và (SCD) hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp SABCD. **Đs:** $V = a^3\sqrt{6}/2$

Bài 10: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ biết (SBC) hợp với đáy ABCD một góc 45° . Tính thể tích khối chóp SABCD. **Đs:** $V = 3R^3/4$

Dạng 2 : Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy

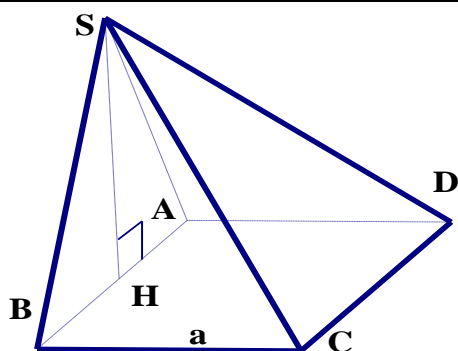
Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD,

1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.

2) Tính thể tích khối chóp SABCD.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) H là trung điểm của AB. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$?
- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABCD bằng công thức nào ?
- *) Tìm h = SH qua tam giác nào bởi công thức gì ?



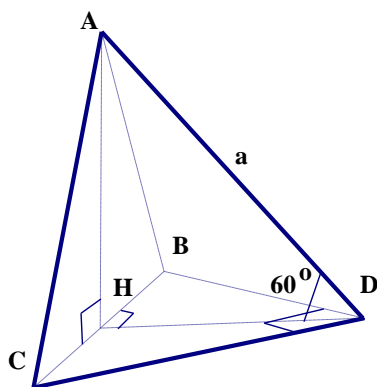
Lời giải:

- 1) Gọi H là trung điểm của AB.
 \square SAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$
 mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$
 Vậy H là chân đường cao của khối chóp.
- 2) Ta có tam giác SAB đều nên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 suy ra $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều, BCD là tam giác vuông cân tại D, $(ABC) \perp (BCD)$ và AD hợp với (BCD) một góc 60° . Tính thể tích tứ diện ABCD.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Xác định góc $[AD, (BCD)] = ?$ Tìm hình chiếu của AD trên (BCD) ?
- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của BCD bằng công thức nào ?
- *) Tìm h = AH qua tam giác nào bởi công thức gì ?



Lời giải:

- Gọi H là trung điểm của BC.
 Ta có tam giác ABC đều nên $AH \perp (BCD)$, mà $(ABC) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.
 Ta có $AH \perp HD \Rightarrow AH = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$
 & $HD = AD \cdot \cot 60^\circ = a\sqrt{3}/3$
 \square BCD $\Rightarrow BC = 2HD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra
 $V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot HD \cdot AH = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có $BC = a$. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° .

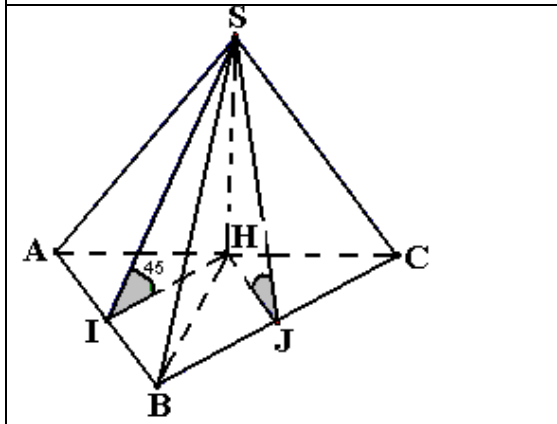
- a. Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC.
- b. Tính thể tích khối chóp SABC.

Phân tích đề bài để dựng hình :

*) Dựng tam giác ABC và SAC dựa vào $(SAC) \perp (ABC)$? .

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Xác định góc $[(SAB), (ABC)] = ?$ và góc $[(SBC), (ABC)] = ?$
- *) So sánh tam giác SHI và SHJ cho gì ? Suy ra AH là gì của tam giác ABC ?
- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào ?
- *) Tìm h = SH qua các tam giác nào bởi tích chất gì ?



Lời giải:

- a) Kẻ $SH \perp BC$ vì $mp(SAC) \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp mp(ABC)$.
Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC $\Rightarrow SI \perp AB, SJ \perp BC$, theo giả thiết $\angle SHI = \angle SHJ = 45^\circ$
Ta có: $\triangle SHI = \triangle SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của $\square ABC$ từ đó suy ra H là trung điểm của AC.
- b) $HI = HJ = SH = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{12}$

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho hình chóp SABC có đáy ABC đều cạnh a, tam giác SBC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC).

- 1) Chứng minh chân đường cao của chóp là trung điểm của BC.
- 2) Tính thể tích khối chóp SABC.

Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$

Bài 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC vuông cân tại A với $AB = AC = a$ biết tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC), mặt phẳng (SAC) hợp với (ABC) một góc 45° . Tính thể tích của SABC.

Đs: $V = \frac{a^3}{12}$

+Bài 3: Cho hình chóp SABC có $\angle BAC = 90^\circ; \angle ABC = 30^\circ$; SBC là tam giác đều cạnh a và $(SAB) \perp (ABC)$. Tính thể tích khối chóp SABC.

Đs:

$V = \frac{a^2 \sqrt{2}}{24}$

Bài 4: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều; tam giác SBC có đường cao $SH = h$ và $(SBC) \perp (ABC)$. Cho biết SB hợp với mặt (ABC) một góc 30° . Tính thể tích hình chóp SABC.

Đs: $V = \frac{4h^3 \sqrt{3}}{9}$

Bài 5: Tứ diện ABCD có ABC và BCD là hai tam giác đều lần lượt nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau biết $AD = a$. Tính thể tích tứ diện.

Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{36}$

Bài 6 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao $SH = h$, nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD,

- 1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.
- 2) Tính thể tích khối chóp SABC.

Đs: $V = \frac{4h^3}{9}$

Bài 7: Cho hình chóp SABC có ABCD là hình chữ nhật, D SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD) biết (SAC) hợp với (ABCD) một góc 30° . Tính thể tích hình chóp SABC

Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$

Bài 8: Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $BC = 4a$, $SAB \perp (ABCD)$, hai mặt bên (SBC) và (SAD) cùng hợp với đáy ABCD một góc 30° . Tính thể tích hình chóp SABCD. Đs: $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$

Bài 9: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi với $AC = 2BD = 2a$ và D SAD vuông cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD. Tính thể tích hình chóp SABCD. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{12}$

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AD = CD = a$; $AB = 2a$, D SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Tính thể tích khối chóp SABCD. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

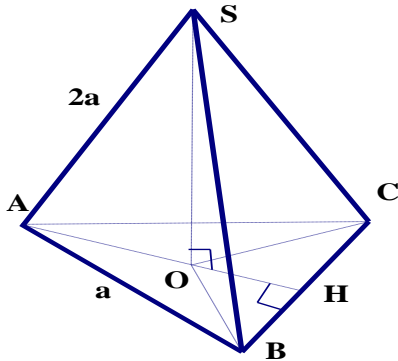
Dạng 3 : Khối chóp đều

Ví dụ 1: Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC. Tính thể tích chóp đều SABC.

? Dựng tam giác đều ABC, từ tâm O dựng $SO \perp (ABC)$. Tại sao ?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) So sánh SA, SB, SC suy ra OA, OB, OC bởi tích chất nào ?
- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào ?
- *) Tìm h = SO qua tam giác nào bởi định lí gì ?



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABC)$ Ta có $SA = SB = SC$ suy ra $OA = OB = OC$
 Vậy O là tâm của tam giác đều ABC.

Ta có tam giác ABC đều nên

$$AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\square SAO \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

Ví dụ 2: Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a.

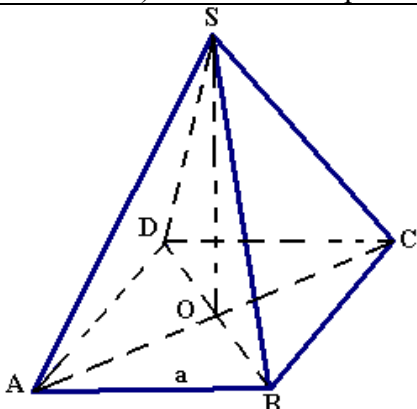
1) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.

2) Tính thể tích khối chóp SABCD.

? Dựng hình thoi ABCD và từ câu hỏi 1, dựng $SO \perp (ABCD)$. Tại sao ?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Hình thoi ABCD có nội tiếp trong đường tròn không? Suy ra gì từ giả thiết?
- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABCD bằng công thức nào ?
- *) Tìm h = SO qua tam giác nào bởi định lí gì ?



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABCD)$

Ta có $SA = SB = SC = SD$ nên

$OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi có đường tròn ngoại tiếp nên ABCD là hình vuông.

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên $\square ASC$ vuông tại S

$$\Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Ví dụ 3: Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

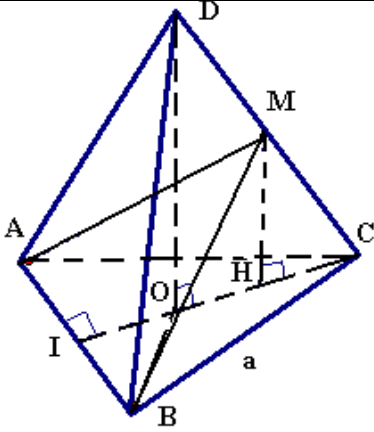
a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC.

? Dựng tam giác đều ABC, từ tâm O dựng $DO \perp (ABC)$. Tại sao?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?
- *) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào?
- *) Tìm $h = DO$ qua tam giác nào bởi định lý gì?
- *) Mặt phẳng $(DCO) \perp (ABC)$? Dựng $MH \perp OC$ suy ra điều gì? Tính MH?



Lời giải:

a) Gọi O là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad OC = \frac{2}{3} CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta DOC \text{ vuông có: } DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

b) Kẻ $MH \parallel DO$, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là MH

$$MH = \frac{1}{2} DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}. \text{ Vậy } V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$$

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho hình chóp đều SABC có cạnh bên bằng a hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{3a^3}{16}$$

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh bên a, góc ở đáy của mặt bên là 45° .

1) Tính độ dài chiều cao SH của chóp SABC.

$$\text{Đs: } SH = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

2) Tính thể tích hình chóp SABC.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3}{6}$$

Bài 3: Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy a và mặt bên hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích hình chóp SABC.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$$

Bài 4: Cho chóp tam giác đều có đường cao h hợp với một mặt bên một góc 30° .

Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{h^3 \sqrt{3}}{3}$$

Bài 5: Cho hình chóp tam giác đều có đường cao h và mặt bên có góc ở đỉnh bằng 60° .

Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{h^3 \sqrt{3}}{8}$$

Bài 6: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy a và $\angle ASB = 60^\circ$.

1) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình chóp đều.

$$\text{Đs: } S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$$

2) Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$$

Bài 7: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao h, góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60° .

Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{2h^3}{3}$$

Bài 8: Cho hình chóp tứ giác đều có mặt bên hợp với đáy một góc 45° và khoảng cách từ chân đường cao của chóp đến mặt bên bằng a . Tính thể tích hình chóp.

Đs: $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 9: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng a hợp với đáy một góc 60° .

Tính thể tích hình chóp.

Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều. Tính cạnh của hình chóp này khi thể tích của nó bằng $V = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$.

Đs: $AB = 3a$

Dạng 4 : Khối chóp & phương pháp tỷ số thể tích

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy ABC, $SA = a$

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

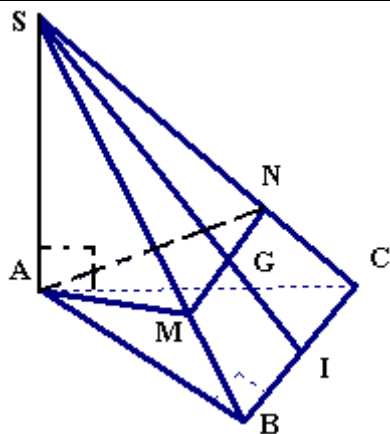
2) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN

Phân tích:

- *) Dựng tam giác ABC vuông cân tại B và $SA \perp (ABC)$.
- *) Dựng mặt phẳng qua G và $\parallel BC$, cho $MN \parallel BC$. Tại sao ?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào ?
- *) Tìm $h = SA$ qua tam giác nào bởi định lý gì ?
- *) Tính trực tiếp thể tích SAMN quá phức tạp ta phải làm sao ? Lập tỉ số thể tích của SAMN và SABC ? Suy ra điều gì ?



Lời giải:

a) Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA$ và $SA = a$

+ ΔABC cân có: $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = a \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2$ $\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{6}$

b) Gọi I là trung điểm BC. G là trọng tâm, ta có: $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

$\alpha \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}$. Vậy: $V_{SAMN} = \frac{4}{9} V_{SABC} = \frac{2a^3}{27}$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E.

a) Tính V_{ABCD}

b) Chứng minh $CE \perp (ABD)$

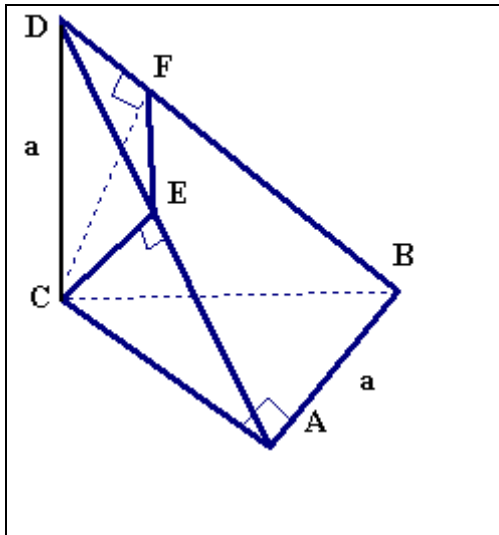
c) Tính thể tích khối tứ diện CDEF.

Phân tích : *) Dựng tam giác ABC vuông cân tại A và $SC \perp (ABC)$

*) Dựng mặt phẳng qua C và $\perp BD$ cho thiết diện CEF.

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) Phân tích $V = \frac{B \cdot h}{3}$ để tìm B và h của ABCD là các đối tượng nào ?
- *) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào ?
- *) Chứng minh CE vuông góc với 2 đường thẳng nào trong mặt phẳng (ABD)?
- *) Tính trực tiếp thể tích CDEF phức tạp ta phải làm sao ? Lập tỉ số thể tích của DCEF và DABC bằng tỉ số các đại lượng hình học trong tam giác vuông nào ?



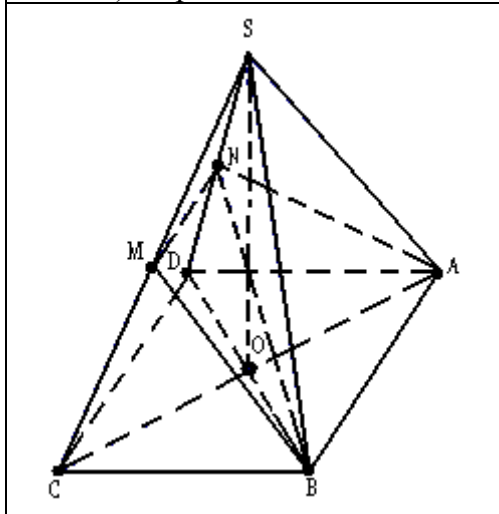
Lời giải:

- a) Tính V_{ABCD} : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot CD = \frac{a^3}{6}$
- b) Tacó: $AB \perp AC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp EC$
 Ta có: $DB \perp EC \Rightarrow EC \perp (ABD)$
- c) Tính V_{DCEF} : Ta có: $\frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DF}{DB}$ (*)
- Mà $DE \cdot DA = DC^2$, chia cho $DA^2 \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DC^2}{DA^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$
- Tương tự: $\frac{DF}{DB} = \frac{DC^2}{DB^2} = \frac{a^2}{DC^2 + CB^2} = \frac{1}{3}$
- Từ (*) $\Rightarrow \frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{1}{6}$. Vậy $V_{DCEF} = \frac{1}{6} V_{DABC} = \frac{a^3}{36}$

Ví dụ 3. Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

Phân tích.

- *) Dựng tứ giác đều ABCD và $SO \perp (ABCD)$
- *) Dựng $(ABM) \parallel CD$ để có điểm N ?
- *) Dựng BD và BN. Tại sao ?
- *) **Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:**
 - *) Phân tích hai chóp tứ giác thành các chóp tam giác nào để lập tỉ số ?
 - *) Hãy so sánh thể tích của SABD và SBCD với SABCD ?
 - *) Lập tỉ số thể tích của SABN với SABD ; SAMN với SABC ?



Lời giải:

- Kẻ $MN \parallel CD$ ($N \in SD$) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).
- *) $\frac{V_{SAND}}{V_{SADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SANB} = \frac{1}{2} V_{SADB} = \frac{1}{4} V_{SABCD}$
- *) $\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SBMN} = \frac{1}{4} V_{SBCD} = \frac{1}{8} V_{SABCD}$
- Mà $V_{SABMN} = V_{SANB} + V_{SBMN} = \frac{3}{8} V_{SABCD}$. $\Rightarrow V_{ABMN.ABCD} = \frac{5}{8} V_{SABCD}$
- Do đó : $\frac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \frac{3}{5}$

Ví dụ 4. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60° . Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F.

- a) Hãy xác định mp(AEMF)
- b) Tính thể tích khối chóp S.ABCD
- c) Tính thể tích khối chóp S.AEMF

Phân tích:

- *) Xác định góc giữa SA và ABCD là góc nào ?
- *) Phân tích $V = Bh/3$ để tìm B và h của SABCD là các đối tượng nào ?
- *) Tìm h = SO qua tam giác và hệ thức lượng giác nào ?
- *) Phân tích hai chóp tứ giác thành các chóp tam giác nào để lập tỉ số ?
- *) Tính thể tích của SAEMF quá phức tạp thì sao ? Lập tỉ số thể tích của SAEMF và SABCD bằng cách nào ?
- *) Hãy so sánh thể tích của SABD và SBCD với SABCD ?
- *) Lập tỉ số thể tích của SAMF với SACD ?

Bài 5. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$, đường cao SA = a. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SB tại H và cắt SC tại K. Tính thể tích hình chóp SAHK. Đs: $V = a^3\sqrt{3}/40$

Bài 6. Cho hình chóp SABCD có thể tích bằng $27m^3$. Lấy A' trên SA sao cho SA = 3SA'. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy hình chóp cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích hình chóp SA'B'C'D'. Đs: $V = 1 m^3$

Bài 7. Cho hình chóp SABCD có thể tích bằng $9m^3$, ABCD là hình bình hành, lấy M trên SA sao cho 2SA = 3SM. Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N. Tính thể tích khối đa diện ABCDMN. Đs: $V = 4m^3$

Bài 8. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao SA = h. Gọi N là trung điểm SC. Mặt phẳng chứa AN và // BD lần lượt cắt SB, SD tại M và P. Tính V_{SAMNP} . Đs: $V = a^2h/9$

Bài 9: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AI và song song với BD chia hình chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích 2 phần này. Đs: $k = 1/2$

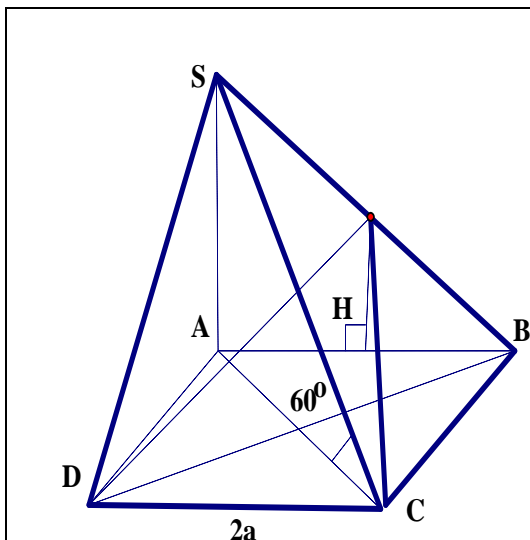
Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và lấy M trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = x$ Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Đs: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

5) Dạng 5: Ôn tập khối chóp và lăng trụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA vuông góc đáy. Góc giữa SC và đáy bằng 60° và M là trung điểm của SB.

- 1) Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.
- 2) Tính thể tích của khối chóp MBCD.

- + Dựng tứ giác ABCD và $SA \perp (ABCD)$
- + Dựng H trung điểm AB. Nhận xét MH với AB? Tại sao?
- + Xác định góc $[SC, (ABCD)] = ?$ Tại sao?
- + Phân tích $V = \frac{1}{3}B.h$ để tìm B và h của SABCD là các đối tượng nào?
- + Tính h = SA trong tam giác nào và hệ thức lượng giác nào?
- + Phân tích $V = \frac{1}{3}B.h$ để tìm B và h của SABCD là các đối tượng nào?
- + MABCD có đường cao là gì? tại sao? Tính MH bởi tính chất gì?



Lời giải:

a) Ta có $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA$

+ $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

+ ΔSAC có: $SA = AC \tan C = 2a\sqrt{6}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}4a^2 \cdot 2a\sqrt{6} = \frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$$

b) Kẻ $MH // SA \Rightarrow MH \perp (DBC)$

Ta có: $MH = \frac{1}{2}SA$, $S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

$$\Rightarrow V_{MBCD} = \frac{1}{4}V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác S.ABC có $AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a$. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp.

+ Dựng tam giác ABC và $SH \perp (ABC)$ với $H \in (ABC)$ và H cách đều 3 cạnh tam giác ABC.

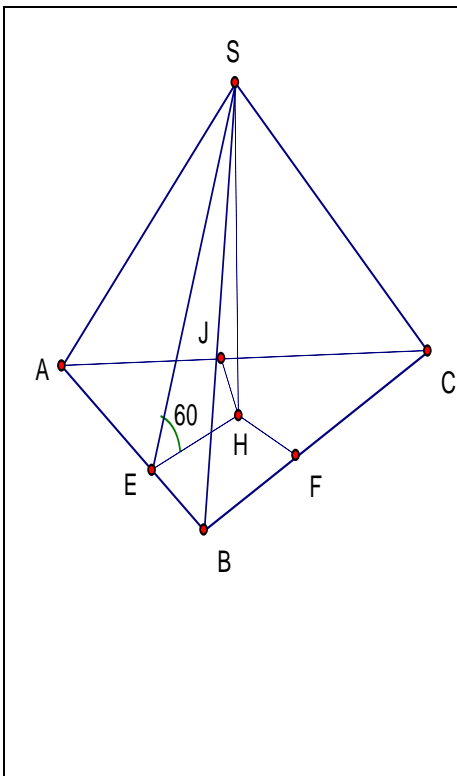
• **phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:**

+ Xác định góc hợp bởi 3 mặt bên với đáy chóp ?

+ Phân tích $V = \frac{1}{3} B.h$ để tìm B và h của SABC là các đối tượng nào ?

+ Tính $B = S_{ABC}$ bằng công thức nào ?

+ Tính $h = SH$ trong tam giác nào và hệ thức lượng giác nào ?



Lời giải:

Hạ $SH \perp (ABC)$, kẻ $HE \perp AB, HF \perp BC, HJ \perp AC$ suy ra $SE \perp AB, SF \perp BC, SJ \perp AC$. Ta có

$$\angle SEH = \angle SFH = \angle SJH = 60^\circ \Rightarrow$$

$\triangle SAH = \triangle SFH = \triangle SJH$ nên $HE = HF = HJ = r$ (r là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$)

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{với } p = \frac{a+b+c}{2} = 9a \text{ Nên } S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a^2$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{6} a}{3}$$

Tam giác vuông SHE:

$$SH = r \cdot \tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{6} a}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{2} a$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} 6\sqrt{6} a^2 \cdot 2\sqrt{2} a = 8\sqrt{3} a^3.$$

Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a\sqrt{3}, AD = a, AA' = a$, O là giao điểm của AC và BD.

a) Tính thể tích khối hộp chữ nhật, khối chóp OA'B'C'D'

b) Tính thể tích khối OBB'C'.

c) Tính độ dài đường cao đỉnh C' của tứ diện OBB'C'.

+ Dựng hộp chữ nhật, hình chóp OA'B'C'D' và OBB'C'.

• **phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:**

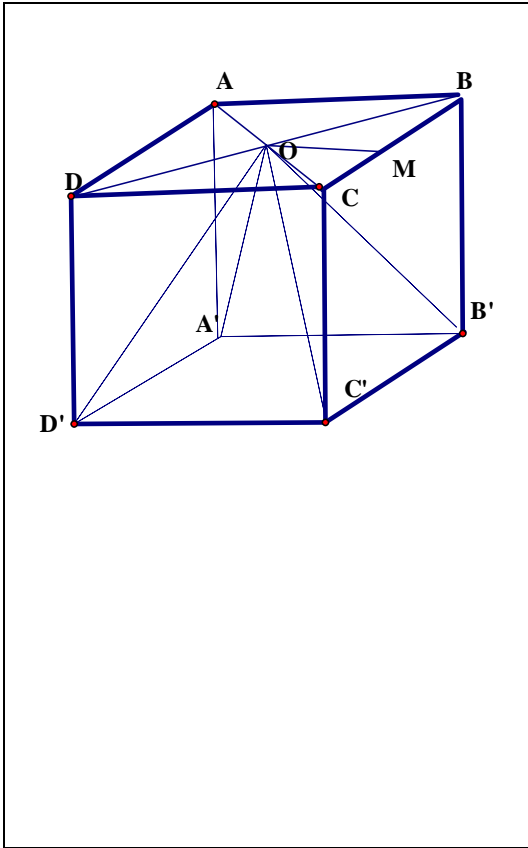
+ Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h của OA'B'C'D' là các đối tượng nào ?

+ Phân tích $V = \frac{1}{3} B.h$ để tìm B và h của OBB'C' là các đối tượng nào ?

+ Tính $B = S_{BB'C'}$ bằng công thức nào ?

+ Tính $h = OM$? Dùng tam giác nào và tính chất gì ?

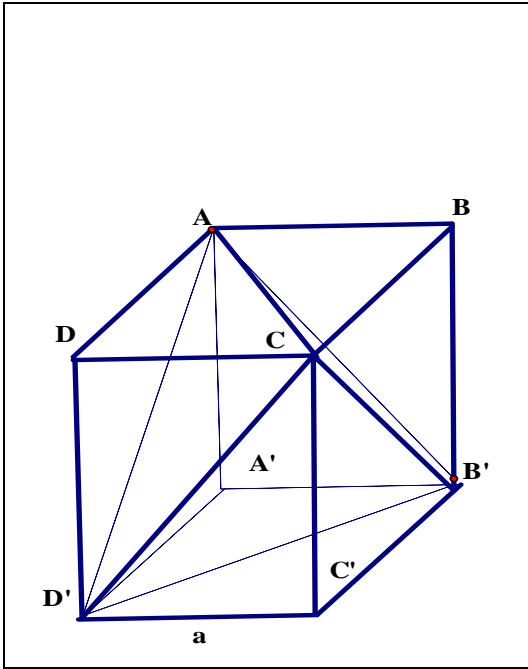
+ Đối với chóp OBB'C' chọn đỉnh C' và đáy là $\square OBB'$ ta có chiều cao yêu cầu và dùng công thức nào để tìm nó ?



Lời giải:
 a) Gọi thể tích khối hộp chữ nhật là V.
 Ta có : $V = AB.AD.AA' = a\sqrt{3}.a^2 = a^3\sqrt{3}$
 ΔABD có : $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$
 * Khối $OA'B'C'D'$ có đáy và đường cao giống khối hộp nên : $\Rightarrow V_{OA'B'C'D'} = \frac{1}{3}V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$
 b) M là trung điểm BC $\Rightarrow OM \perp (BB'C')$
 $\Rightarrow V_{OBB'C'} = \frac{1}{3}S_{BB'C'}.OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$
 c) Gọi C'H là đường cao đỉnh C' của tứ diện $OBB'C'$. Ta có : $C'H = \frac{3V_{OBB'C'}}{S_{OBB'}}$
 ΔABD có : $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$
 $\Rightarrow S_{OBB'} = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow C'H = 2a\sqrt{3}$

Ví dụ 4: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính thể tích khối tứ diện ACB'D'.

- + Phân tích $V = \frac{1}{3} B.h$ để tìm B và h của ACB'D' là các đối tượng nào ?
- + Tính trực tiếp thể tích ACB'D' phức tạp ? Ta phân tích lập phương thành 4 khối tứ diện có thể tích bằng nhau nào ?
- + Khi đó nhận xét $V_{ACB'D'}$ và $V_{CB'D'C'}$? Suy ra điều gì ?



Lời giải:
 Hình lập phương được chia thành: khối ACB'D' và bốn khối $CB'D'C'$, $BB'AC$, $D'ACD$, $AB'A'D'$.
 + Các khối $CB'D'C'$, $BB'AC$, $D'ACD$, $AB'A'D'$ có diện tích đáy và chiều cao bằng nhau nên có cùng thể tích.
 Khối $CB'D'C'$ có $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$
 + Khối lập phương có thể tích: $V_2 = a^3$
 $\Rightarrow V_{ACB'D'} = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng tam giác có các cạnh bằng a.
 a) Tính thể tích khối tứ diện A'B'BC.
 b) E là trung điểm cạnh AC, mp(A'B'E) cắt BC tại F. Tính thể tích khối CA'B'FE.

- + Phân tích $V = \frac{1}{3} B.h$ để tìm B và h của A'B'BC là các đối tượng nào ?
- + Tính trực tiếp thể tích CA'B'FE phức tạp ? Ta phân tích khối chóp thành 2 khối tứ diện nào mà tính thể tích đơn giản hơn ?

	<p>Lời giải:</p> <p>a) Khối A'B'BC: Gọi I là trung điểm AB, $V_{A'B'BC} = \frac{1}{3} S_{A'B'B} \cdot CI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$</p> <p>b) Khối CA'B'FE: phân ra hai khối CEFA' và CFA'B'.</p> <p>+ Khối A'CEF có đáy là CEF, đường cao A'A nên $V_{A'CEF} = \frac{1}{3} S_{CEF} \cdot A'A$</p> $S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow V_{A'CEF} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ <p>+ Gọi J là trung điểm B'C'. Ta có khối A'B'CF có đáy là CFB', đường cao JA' nên $V_{A'B'CF} = \frac{1}{3} S_{CFB'} \cdot A'J$</p> $S_{CFB'} = \frac{1}{2} S_{CBB'} = \frac{a^2}{4}$ $\Rightarrow V_{A'B'CF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ <p>+ Vậy: $V_{CA'B'FE} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$</p>
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng ABCA₁B₁C₁ có ABC vuông. AB = AC = a; AA₁ = a√2. M là trung điểm AA₁. Tính thể tích lăng trụ MA₁BC₁ Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 2: Hình chóp SABCD có ΔABC vuông tại B, SA ⊥ (ABC). ACB = 60°, BC = a, SA = a√3, M là trung điểm SB. Tính thể tích MABC. Đs: $V_{MABC} = \frac{1}{4} a^3$

Bài 3: SABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AB = 2, ACB = 90°. ΔSAC và ΔSBD là các tam giác đều có cạnh bằng √3. Tính thể tích khối chóp SABCD. Đs: $V_{SABCD} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Bài 4: Tính thể tích hình chóp tam giác đều SABC trong các trường hợp sau:

a) Cạnh đáy bằng 1, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Đs: $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$

b) $AB = 1, SA = 2$. Đs: $V = \frac{\sqrt{11}}{12}$

Bài 5: Cho lăng trụ ABCA'B'C' có độ dài cạnh bên = 2a, ΔABC vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm BC.

Tính $V_{A'ABC}$ theo a? Đs: $V = \frac{a^3}{2}$

Bài 6: Cho hình chóp SABC có đáy ABCD là hình bình hành và $S_{ABCD} = \sqrt{3}$ và góc giữa 2 đường chéo bằng 60° , các cạnh bên nghiêng đều với đáy 1 góc 45° .

Tính V_{SABCD} . Đs: $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 7: Cho hình chóp SABC có $SA = SB = SC = a$. $\widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ,$

$\widehat{CSA} = 120^\circ$. Chứng minh rằng ΔABC vuông. Tính V_{SABC} . Đs: $V = \frac{a\sqrt{2}}{12}$

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích khối chóp S.BMDN

Đs: $v_{S.BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 9: Cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C' có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CC', C'A'. Tính tỉ số thể tích hai phần lăng trụ do (MNE) tạo ra. Đs: $k = 1$

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Đs: $v_{M.CNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$