BÀI TẬP TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A/- KIẾN THỨC CƠ BẢN.

I. Tính đơn điệu của hàm số.

1). Định nghĩa: Cho hàm số y = $f(x)$ xác định trên K

✶ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

✶ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Chú ý: K là một khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng

2). Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K

a) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K

b) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K

Định lý mở rộng: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K

b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K

c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì $f(x)$ không đổi trên K

3). Hai dạng toán cơ bản.

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Quy tắc tìm:

✶ Tìm tập xác định của hàm số

✶ Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định

✶ Lập bảng biến thiên

✶ Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Dạng 2. Tìm các giá trị m để hàm số đơn điệu (đồng biến, nghịch biến) trên khoảng cho trước

Phương pháp: Xét hàm số $y = f(x)$ trên K

✶ Tìm tập xác định của hàm số (nếu cần). Tính $f'(x)$

✶ Nêu điều kiện của bài toán:

+ Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in K$

+ Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in K$

✶ Từ điều kiện trên sử dụng các kiến thức về dấu của nhị thức bậc nhất, tam thức bậc hai để tìm m

Chú ý: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

✶ $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ ✶ $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

II. Cực trị của hàm số.

1). Định lí 1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$ $(h > 0)$.

a) $f'(x) > 0$ trên $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm CĐ của $f(x)$.

b) $f'(x) < 0$ trên $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm CT của $f(x)$.

Nhận xét: Hàm số có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm không xác định.

Qui tắc 1 tìm cực trị hàm số (dựa vào định lý 1).

✶ Tìm tập xác định.

✶ Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

✶ Lập bảng biến thiên.
✶ Từ bảng biến thiên dựa vào định lý 1 suy ra các điểm cực trị.

2). Định lí 2. Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong $(x_0 - h; x_0 + h)$ $(h > 0)$.

a) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

b) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Qui tắc 2 tìm cực trị hàm số (dựa vào định lý 2).
✶ Tìm tập xác định.
✶ Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i là nghiệm
✶ Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
✶ Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của x_i.

3). Các dạng toán thường gặp
Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số cho trước.
Phương pháp: Dựa vào quy tắc 1 hoặc quy tắc 2
Dạng 2. Điều kiện để hàm số đạt cực trị
Phương pháp:
✶ Tìm tập xác định D của hàm số
✶ Tính $f'(x)$
✶ Hàm số đạt cực trị tại $x_0 \in D \Leftrightarrow f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0

Một số chú ý:
✶ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx = d,\ a \neq 0$ có cực trị (cực đại và cực tiểu) $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
✶ Xét hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx + c,\ a \neq 0$

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b), \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

+ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow ab < 0$
+ Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab > 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

B/-MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA.

VD1. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số

GIẢI
✶ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
✶ $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$
✶ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$
✶ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 CT	$\nearrow$	3 CĐ	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên (0; 2); hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.
Hàm số đạt cực đại tại x = 2, $y_{CĐ}$ = 3; hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, $y_{CT} = -1$.

VD2. Cho hàm số $y=-x^4+3x^2+1$. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số.

GIẢI

✶ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

✶ $y' = -4x^3+6x$; $y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$

✶ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

✶ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	$\frac{13}{4}$ CĐ	↘	1 CT	↗	$\frac{13}{4}$ CĐ	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ và $\left(0;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$; nghịch biến trên $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2};+\infty\right)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $y_{CĐ}=\dfrac{13}{4}$, Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, $y_{CT} = 1$

VD3. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số.

GIẢI

✶ Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

✶ $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

✶ Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$.

✶ BBT

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;-\infty)$.
Hàm số không có cực trị

VD4. Cho hàm số $y=\left(m^2-1\right)\dfrac{x^3}{3}+(m+1)x^2+3x+5$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

GIẢI

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=(m^2-1)x^2+2(m+1)x+3$

✶ Nếu $m=1$ thì $y'=4x+3$

Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $y'\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{3}{4}$ (loại so với yêu cầu bài toán)

✶ Nếu $m=-1$ thì $y'=3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (nhận so với ycbt) (1)

✶ Nếu $m\ne\pm 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=m^2-1>0\\ \Delta=(m+1)^2-3(m^2-1)\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \vee m>1 \\ m^2-m-2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1\vee m>1\\ m\le -1 \vee m\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m\ge 2\end{array}\right. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1\\ m\ge 2\end{array}\right.$

VD5. Cho hàm số $y=-x^3-3(2m+1)x^2-(12m+5)x-2$. Định mọi giá trị của tham số m để hàm số luôn luôn nghịch biến.

GIẢI

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=-3x^2-6(2m+1)x-(12m+5)$

Biệt số $\Delta'=9(2m+1)^2-3(12m+5)=36m^2-6$

Vì hệ số a của y' là $-3<0, \forall m$ nên hàm số luôn luôn nghịch biến $\Leftrightarrow y'\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0 \Leftrightarrow 36m^2-6\le 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{6}\le m\le \frac{\sqrt{6}}{6}$

Vậy các giá trị m cần tìm là: $-\frac{\sqrt{6}}{6}\le m\le \frac{\sqrt{6}}{6}$

VD6. Định a để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+(a+3)x-4$. Đồng biến trên khoảng $(0;3)$

GIẢI

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=-x^2+2(a-1)x+a+3$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3) \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow -x^2+2(a-1)x+a+3\ge 0, \forall x\in(0;3)$ (1)

Xét bất phương trình (1)

(1) $\Leftrightarrow x^2+2x-3\le a(2x+1)$

$x\in(0;3) \Rightarrow 2x+1>0$ nên (1) $\Leftrightarrow a\ge \frac{x^2+2x-3}{2x+1}=g(x)$

Xét hàm số $g(x)$ trên khoảng $(0;3)$

Có $g'(x)=\dfrac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}>0,\ \forall x\in(0;3)$

BBT:

x	0		3
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-3	$\nearrow$	$\frac{12}{7}$

Từ BBT suy ra $a\geq g(x),\ \forall x\in(0;3)\Leftrightarrow a\geq\dfrac{12}{7}$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)\Leftrightarrow a\geq\dfrac{12}{7}$

VD7. Định m để hàm số $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$. Nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

GIẢI

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=3x^2+6x+m+1$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x+m+1\leq 0,\forall x\in(-1;1)$ (1)

Xét BPT (1): (1) $\Leftrightarrow m\leq -3x^2-6x-1=g(x)$

Xét hàm số $g(x),\ x\in(-1;1)$

Có: $g'(x)=-6x-6\leq 0,\ \forall x\in(-1;1)$

BBT:

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-10

Từ BBT suy ra $m\leq g(x),\ \forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\leq -10$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)\Leftrightarrow m\leq -10$

VD8. Tìm điều kiện của m để hàm số $y=2x^3-3(m+2)x^2+6(m+1)x-3m+6$ đồng biến trên khoảng $(5;\infty)$.

GIẢI

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=6x^2-6(m+2)x+6(m+1)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;\infty)\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in(5;+\infty)$

$\Leftrightarrow 6x^2-6(m+2)x+6(m+1)\geq 0,\ \forall x\in(5;+\infty)$ (1)

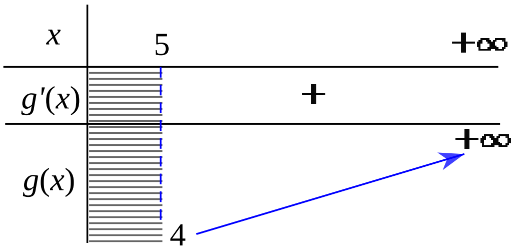
Xét BPT (1): (1) $\Leftrightarrow 6x^2-12x+6\geq 6m(x-1)$

Vì $x \in (5;+\infty)$ nên $x-1>0$ do đó:

$(1) \Leftrightarrow m \le \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}, \forall x \in (5;+\infty) \Leftrightarrow m \le x-1 = g(x), \forall x \in (5;+\infty)$

Xét hàm số $g(x), x \in (5;0)$ ta có: $g'(x) = 1 > 0, \forall x \in (5;+\infty)$

BBT:



Từ BBT suy ra $m \le g(x), \forall x \in (5;+\infty) \Leftrightarrow m \le 4$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty) \Leftrightarrow m \le 4$

VD9. Cho hàm số: $y = (m-2)x^3 - mx - 2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số không có điểm cực đại và điểm cực tiểu.

GIẢI

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 3(m-2)x^2 - m$

Hàm số không có cực trị thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow 0 + 4.3m(m-2) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$

VD10. Cho hàm số: $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Tìm m để hàm số

a) Có cực đại và cực tiểu. **b)** Đạt cực đại tại điểm $x = 1$

GIẢI

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$

a) Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} \ne 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ne 0 \\ (-m)^2 - (m^2 - m + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

b) Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$ và $y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Vậy khi $m = 2$ hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

VD11. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \dfrac{1}{3}$. Tìm m để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$

GIẢI

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} \ne 0 \\ \Delta'_{y'} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$ (*)

Vì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên: $x_1 + 2x_2 = 1$ (1)

và $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{2(m-1)}{m} & (2) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3(m-2)}{m} & (3) \end{cases}$ và

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $x_1 = 3 - \dfrac{4}{m}$, $x_2 = -1 + \dfrac{2}{m}$

Thay vào (3) $\Rightarrow$ $\left(-1 + \dfrac{2}{m}\right)\left(3 - \dfrac{4}{m}\right) = \dfrac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow 3m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\ (N) \\ m = \dfrac{2}{3}\ (N) \end{array}\right.$

Vậy: $m = 2, m = \dfrac{2}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán

C/-BÀI TẬP ÁP DỤNG.

◈ BÀI TẬP CƠ BẢN.

Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu và cự trị của các hàm số:

a). $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ b). $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ c). $y = x^3 + x^2 + 2x - 3$

d). $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ e). $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 4$ f). $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$

Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu và cự trị của các hàm số:

a). $y = x^4 - 2x^2 + 5$ b). $y = x^4 + 3x^2 - 4$ c). $y = -x^4 + 4x^2 + 3$

d). $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ e). $y = x^2 - \dfrac{1}{4}x^4$ f). $y = -x^4 - 5x^2 + 1$

Bài 3. Tìm các khoảng đơn điệu và cự trị (nếu có) của các hàm số:

a). $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ b). $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ e). $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$ f). $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$

Bài 4. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số:

a). $y = \sqrt{2x - x^2}$ b). $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ c). $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

d). $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ e). $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 1}$ f). $y = x\sqrt{x^2 - 9}$

◈ BÀI TẬP NÂNG CAO.

☑ **Loại 1. Tính đơn điệu của hàm số.**

Bài 1. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + (m+2)x^2 - (2m-1)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2mx^2 + 4mx + 2$. Xác định m để:

- **a)** Hàm số đồng biến trên miền xác định
- **b)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

Bài 4. Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - mx + 1$. Xác định m để :

- **a)** Hàm số nghịch biến trên trên tập xác định của nó
- **b)** Hàm số nghịch biến với mọi $x > 1$

Bài 5. Tìm m để hàm số $y = \frac{1-m}{3}x^3 - 2(2-m)x^2 + 2(2-m)x + 5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Bài 6. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Bài 7. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

Bài 8. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+2}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định

Bài 9. Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m}{x-m}$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Bài 10. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 1

☑ Loại 2. Cực trị của hàm số.

Bài 1. Tìm m để các hàm số sau có cực đại và cực tiểu:

- **a)** $y = x^3 + 3x^2 + mx - 10$
- **b)** $y = x^3 - 3mx^2 - 3(m^2 - 2)x + 1$
- **c)** $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$
- **d)** $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx + m$

Bài 2. Tìm để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = -2$

Bài 3. Tìm m để hàm số $y = mx^3 + (m^2 - 2)x^2 - 8x + 1$ đạt cực đại tại $x = 2$

Bài 4. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + n$. Tìm m, n để hàm số đạt cực trị bằng 2 tại $x = 1$

Bài 5. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m+1)x^2 + (6-2m)x + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục Oy

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2) + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ dương

Bài 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$. Tìm m để hàm số có hai cực trị cùng dấu

Bài 8. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu đồng thời hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị là $x_1, x_2 : x_1 + 2x_2 = 1$

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 + 2(m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$. Tìm m để hàm số có cực trị tại $x_1; x_2 : \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

Bài 10. Cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$. Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu và các điểm này cách đều trục tung

Bài 11. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^2 - 3m$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu với hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Bài 12. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m + 1)x^2 + 6m(m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $D : y = x + 4$

"Trên đỉnh cao của vinh quang không có vết chân của những kẻ lười biếng"