NHỮNG BẤT ĐẲNG THỨC TH□ỜNG GẶP

Những kiến thức th- ờng gặp $(a+b)^2 \geq 4ab$

Bất đẳng thức hay dùng cho a+b $\geq 0 \Rightarrow \frac{a^n+b^n}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^n$, n là số tự nhiên

Dấu bằng xảy ra khi a= b với n chẵn, $a^2 = b^2$ nếu n lẻ

giải ph- ơng trình: Giải ph- ơng trình $(x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6 = 18 - 8\sqrt{5}$

$$\frac{(-1-x)^6+(x+\sqrt{5})^6}{2} \geq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^6 = 9 - 4\sqrt{5} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Bài 1

Chứng minh $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$; với a, b, c d- ơng.

<u>Giải:</u> $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$

$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$, chia abc $\Rightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$

Bài 2

Chứng minh: $\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b+\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{c+\sqrt{(c+b)(c+a)}} \leq 1$

Với a, b, c > 0

<u>Giải:</u> $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac} \Rightarrow (a+b)(a+c)-(\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2 = (a-\sqrt{bc})^2 \geq 0$

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{a}{a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Cộng ba vế lại có (đpcm)

Bài 3

Cho a, b, c là ba số d- ơng và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = a+b+c$. Chứng minh:

$a + b + c \geq 3abc$

<u>Giải</u>: Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = a+b+c \Leftrightarrow ab+bc+ca = abc(a+b+c)$

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow a+b+c \geq 3abc$

Bài 4

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1} \geq 1$

với a, b, c là các số d- ơng và $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Giải: Sử dụng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow \frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1} \ge \frac{9}{ab+bc+ca+3}$

$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ dấu bằng khi $a = b = c \Rightarrow \frac{9}{ab+bc+ca+3} \ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2+3}=1$

dấu bằng khi $a = b = c = \sqrt{2}$.

Bài 5

Gọi a, b, c là ba cạnh tam giác. Chứng minh $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$

Giải: $a+b> c$ và $a^2 - ab + b^2 > 0$, $a^3 + b^3 + 3abc = (a+b)(a^2-ab+b^2) + 3abc >$

$> c(a^2-ab+b^2) + 3abc = c(a+b)^2 > c^3$

Bài 6

Cho a, b, c là ba số d- ơng và có tổng bằng 3.

Chứng minh $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge ab + bc + ca$

Giải: $a^2 +b^2+c^2 +2(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{9-a^2-b^2-c^2}{2}$

Thay vào ta cần chứng minh: $a^2 +b^2+c^2 + 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \ge 9$

$a^2 + 2\sqrt{a} = a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{a}a^2} = 3a$

Cộng các vế ta có (đpcm)

Bài 7

Cho a, b là các số thực thoả mãn $a^2 + b^3 \ge a^3 + b^4$. Chứng minh:

$a^3 + b^3 \le 2$

Giải:

Cách 1: Tr- ớc hết chứng minh $a + b^2 \ge a^2 + b^3$

Giả sử $a + b^2 < a^2 + b^3 \Rightarrow 2(a^2 + b^3) > a + b^2 + a^3 + b^4 \ge 2(a^2 + b^3)$ vô lý

$a + b^2 \ge a^2 + b^3 \ge a^3 + b^4 \Rightarrow 2(a + b^2) \ge a^2 + b^3 + a^3 + b^4$

$(1+a^2) + (1+b^4) \ge 2(a + b^2) \ge a^2 + b^3 + a^3 + b^4 \Rightarrow a^3 + b^3 \le 2$

Cách 2: Bằng ph- ơng pháp phản chứng . Giả sử $a^3 + b^3 > 2$. Chứng minh:

$a^2 + b^3 < a^3 + b^4$

Từ $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \Rightarrow a^2 + b^2 \le \sqrt[3]{2(a^3+b^3)^2} < \sqrt[3]{(a^3+b^3)^2(a^3+b^3)} = a^3+b^3$

$a^2 - a^3 < b^3 - b^2$, nh- ng $0 \le b^2(b - 1)^2 \Rightarrow b^3 - b^2 \le b^4 - b^3 \Rightarrow a^2 - a^3 < b^4 - b^3$

$\Rightarrow a^2 + b^3 < a^3 + b^4$.

Bài 8

Cho a, b, c là các số thực đặt $M = a + b + c + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

Chứng minh $M \ge \max\{3a, 3b, 3c\}$ và một trong 3 số:

$\sqrt{M-3a};\sqrt{M-3b};\sqrt{M-3c}$ bằng tổng hai số kia.

Giải: $3(b - c)^2 \ge 0 \Rightarrow 4b^2 + 4c^2 - 4bc \ge b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow$

$4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq (2a - b - c)^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \geq 2a - b - c \Rightarrow$ cộng hai vế với a + b + c

T- ơng tự $M \geq 3b$, $M \geq 3c \Rightarrow M \geq \max\{3a, 3b, 3c\}$

đặt $x = \sqrt{M - 3a}$, $y = \sqrt{M - 3b}$, $z = \sqrt{M - 3c} \Rightarrow a = \frac{M - x^2}{3}$, $b = \frac{M - y^2}{3}$, $c = \frac{M - z^2}{3}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6\sqrt{\frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2}$

$x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2}$

$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0$

$(x^2+y^2)^2 - 2z^2(x^2+y^2) + z^4 - 4x^2y^2 = 0$

$(x + y + z)(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = 0$

Bài 9

Cho 4 số thực a, b, c, d và $a^2 + b^2 \leq 1$. Chứng minh:

$$(ac + bd - 1)^2 \geq (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1)$$

<u>Giải:</u> Nếu $c^2 + d^2 \geq 1$ bất đẳng thức đúng.

Chúng ta chứng minh $c^2 + d^2 < 1$, đặt $x = 1 - a^2 - b^2$ và $y = 1 - c^2 - d^2$

$0 \leq x, y \leq 1$. Bđt $\Leftrightarrow (2 - 2ac - 2bd)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow ((a-c)^2+(b-d)^2+x+y)^2 \geq 4xy$

$((a-c)^2+(b-d)^2+x+y)^2 \geq (x + y)^2 \geq 4xy$.

Bài 10

Cho a, b, c là ba số d- ơng và ab+bc+ca = 1. Chứng minh $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 1$

<u>Giải:</u> $a^3+b^3 \geq ab(a+b) \Rightarrow \frac{a^3}{b} + b^2 \geq ab + a^2$ cộng lại (cđpcm)

Bài 10

Chứng minh: $\frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a + b + c}{2}$

Giải: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ từ đó $\frac{a^3}{b^2 + c^2} = a - \frac{ab^2}{b^2 + c^2} \geq a - \frac{b}{2}$

Bài 11

Cho a, b, c, d là các số d- ơng và có tổng bằng 1. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$$

<u>Giải:</u> $\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq a$

Dòu bằng khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Bài 12

Cho a, b, c với $0 < a, b, c \leq 1$. Chứng minh:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq a + b + c$

2) $\frac{1}{a^k}+\frac{1}{b^k}+\frac{1}{c^k} \geq a^k + b^k + c^k$ (k là là số tự nhiên)

<u>Giải:</u>1) (a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ca + a + b + c-1=

$=1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+a+b+c-1= \frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+a+b+c \leq 0$

2) $0 < a \leq 1 \Leftrightarrow 0 < a^k - 1 \leq 0$

$(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0 \Rightarrow (a^k-1)(b^k-1)(c^k-1) \leq 0$

$(a^k-1)(b^k-1)(c^k-1) = a^kb^kc^k- a^kb^k- b^kc^k- c^ka^k+a^k+b^k+c^k-1\leq 0$

$\frac{1}{a^k}+\frac{1}{b^k}+\frac{1}{c^k} \geq a^k + b^k + c^k$.

Bài 13

Cho a, b, c là các số không âm và có tổng bằng 1. Chứng minh:

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27} \text{ (CanMO1999)}$$

<u>Giải</u>: Gọi x =max{a, b, c}

- $a \geq b \geq c \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \leq a^2b + b^2c + c^2a + c(ab + (a-b)(b-c))=$

$= a^2b+ 2abc +bc^2 = (a + c)^2b = 4(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b)b \leq \frac{4}{27}$

dấu bằng khi $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, c = 0.

* $a \geq c \geq b \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a = a^2c + c^2b + b^2a + (a-c)(c-b)(a-b) \leq$

$\leq a^2c + c^2b + b^2a \leq \frac{4}{27}$ (trở lại tr- ờng hợp trên)

dấu bằng xảy ra khi hoán vị $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, c = 0.

Bài 14

Cho a, b, c là các số d- ơng. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1. \text{ (IMO-2001)}$$

<u>Giải:</u> Cách 1- f(a, b, c) = f(ka, kb, kc) $\Rightarrow$ đặt abc = 1

$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{a^3}}}$, đặt $x = 1 + \frac{8}{a^3}$, $y = 1 + \frac{8}{b^3}$, $z = 1 + \frac{8}{c^3}$

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \geq \sqrt{xyz}$

$\Leftrightarrow xy + yz + zx + 2\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \geq xyz$

$x = 1 + \frac{8}{a^3} \ge 9\sqrt[9]{\frac{1}{a^{24}}} = \frac{9}{a^2\sqrt[3]{a^2}} \Rightarrow \sqrt{x} \ge \frac{3}{a\sqrt[3]{a}} \Rightarrow \sqrt{xyz} \ge \frac{27}{\sqrt[3]{(abc)^4}} = 27$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{xyz}} = 9$

Cách 2

Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \ge \frac{a\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}}$

$\Leftrightarrow (a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})^2 \ge \sqrt[3]{a^2}(a^2 + 8bc)$

$(a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})^2 - (a\sqrt[3]{a})^2 = (b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})\ (2a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}) =$

$(b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})\ (a\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}) \ge 2\sqrt[3]{(bc)^2}\, 4\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{bc} = 8bc\sqrt[3]{a^2} \Leftrightarrow$

$(a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})^2 \ge (a\sqrt[3]{a})^2 + 8bc\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^2}(a^2 + 8bc)$, t- ơng tự

$\frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} \ge \frac{b\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}}, \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \ge \frac{c\sqrt[3]{c}}{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}}$ cộng lại (đpcm)

Mở rộng $\frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + kca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + kab}} \ge \frac{3}{\sqrt{1+k}}$, $k \ge 8$

Bài 15

Chứng minh bất đẳng thức $ab + bc + ca \le \frac{2}{7} + \frac{9}{7}abc$

với a, b, c là các số d- ơng và có tổng bằng 1(Chọn đội tuyển QG 2004)

<u>Giải:</u> Nếu $a \ge \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{9a}{7} \ge 1 \Rightarrow bc \le \frac{9abc}{7}$, $a+b+c = 1 \Rightarrow b + c \le \frac{2}{9}$, do $a < 1$

$\Rightarrow ab + ac < \frac{2}{9} < \frac{2}{7} \Rightarrow ab + bc + ac \le \frac{2}{7} + \frac{9}{7}abc$

Nếu $a < \frac{7}{9} \Rightarrow 1 - \frac{9a}{7} > 0$, $bc \le \frac{(b+c)^2}{4}$, $\Rightarrow bc \le \frac{(1-a)^2}{4}$

$ab + bc + ac - \frac{9}{7}abc = bc(1 - \frac{9}{7}a) + a(b+c) \le (1 - \frac{9a}{7})\frac{(1-a)^2}{4} + a(1-a) \le \frac{2}{7}$

$(7 - 9a)(1 - a)^2 + 28a(1 - a) \le 8 \Rightarrow (a + 1)(3a - 1)^2 \ge 0$

Dấu bằng khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 16

Cho a, b, c là các số d- ơng a+b+c = abc. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}$$

<u>Giải</u>: Đặt $a = tg\alpha$, $b = tg\beta$, $c = tg\gamma$, với $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$ và $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$\text{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha tg\beta tg\gamma}{1 - tg\alpha tg\beta - tg\beta tg\gamma - tg\gamma tg\alpha} = \dfrac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}$

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = 2\cos(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2}) - 2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} + 1 \le$

$2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} + 1 = 2\sin\dfrac{\gamma}{2} - 2\sin^2\dfrac{\gamma}{2} + 1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}(2\sin\dfrac{\gamma}{2} - 1)^2 \le \dfrac{3}{2}$

Bài 17

Cho a, b, c là các số d- ơng. Chứng minh:

$$\frac{1}{a(a+c)} + \frac{1}{b(b+a)} + \frac{1}{c(c+b)} \ge \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Giải: $\dfrac{1}{a(a+c)} + \dfrac{1}{b(b+a)} + \dfrac{1}{c(c+b)} \ge \dfrac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}$

$a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}$, $a + b + c = \dfrac{1}{2}(a+b+b+c+c+a) \ge \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$(a+b+c)^2 \ge \dfrac{9}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)abc}$ thay vào (đpcm)

Bài 18

Tìm hàm số f(x) biết rằng với mọi số thực x, y, z ta có:

$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \ge 3f(x+2y+3z)$

Giải: Thay $x = y = -z \Rightarrow f(2x) \ge f(0)$

Thay $x=z=-y \Rightarrow f(2x) \le f(0) \Rightarrow f(x) = \text{const}$

Bài 19

Chứng minh $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}] = [\sqrt{9n+8}]$, với n số tự nhiên

Giải Thực ra đây là chứng minh bđt:

$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} >$

$> \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \Rightarrow 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$

$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} < 3\sqrt{n+1} = \sqrt{9n+9}$

Chứng minh $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} > \sqrt{9n+8}$ với n =0 và n = 1 đúng

$n \ge 2$, $n(n+2) - (n+\dfrac{7}{9})^2 = \dfrac{4n}{9} - \dfrac{49}{81} > 0$ với $n \ge 2$, $\Rightarrow \sqrt{n(n+2)} > n + \dfrac{7}{9}$

Từ $2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \Rightarrow 2(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) > 3(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})$

$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2 > \dfrac{9}{4}(2n+2+\sqrt{n(n+2)}) > \dfrac{9}{4}(2n+2+2n+2.\dfrac{7}{9}) = 9n+8$

Bài 20

Cho a, b, c là các số d- ơng có tích bằng 1. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{a+c+1}\le\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$$

Giải: đặt x = a + b+ c và y = ab + bc + ca (x, y ≥ 3)

$\frac{x^2+4x+y+3}{x^2+2x+xy+y}\le\frac{4x+y+12}{4x+2y+9}\Rightarrow 3x^2y + xy^2 + 6xy - 5x^2 - y^2 - 24x - 3y - 27 \ge 0$

$(3x^2y - 5x^2 - 12x) + (xy^2 - y^2 - 3x - 3y) + (6xy - 9x - 27) \ge 0$, đúng x, y ≥ 3

Bài 21

a, b, c là ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh:

$1 < ab + bc + ca - abc \le \frac{28}{27}$

Giải: Giả sử $c \le b \le a$, từ $2- a = b + c > a \Rightarrow a < 1$

Xét: $ab+bc+ca-abc-1 = a(b+c)+bc(1-a)-1=a(2-a)+bc(1-a)-1=(1-a)(bc+a-1)$

$b < 1, c <1 \Rightarrow (b-1)(c-1)>0 \Rightarrow bc + 1- b-c> 0 \Rightarrow bc+a-1>0 \Rightarrow$ Vế trái đpcm

$bc \le\frac{(b+c)^2}{4} = (1-\frac{a}{2})^2=1- a+\frac{a^2}{4}\Rightarrow bc+a-1\le \frac{a^2}{4}\Rightarrow \frac{(1-a)a^2}{4} \le \frac{1}{27}$

$\Rightarrow (3a+1)(3a-2)^2 \ge 0$

Bài 22

Cho a, b, c là ba số d- ơng. Chứng minh:

1) $a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 + 3a^4b^4c^4 \ge 2a^3b^3c^3(a^3+b^3+c^3)$
2) $a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2 \ge 2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$

Giải:

1) Chia hai vế cho $\Rightarrow a^4b^4c^4$ Đặt $x = \frac{a^2}{bc}$; $y= \frac{b^2}{ac}$; $z = \frac{c^2}{ab}$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} + 3 \ge 2(x+y+z)$

$(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})^2 + 2(x-1)(y-1) + (yz-1)^2 \ge 0$, vì xyz = 1 nên bao giờ cũng tồn tại hai trong ba số x, y, z cùng lớn hơn 1 hoặc nhỏ hơn 1.

2) T- ơng tự nh- trên chia hai vế cho $a^2b^2c^2$; đặt $x = \frac{ab}{c^2}$; $y = \frac{bc}{a^2}$; $z = \frac{ac}{b^2} \Rightarrow xyz = 1$sau đó trở lại nh- 1)

Bài 23

Cho a, b là các số d- ơng nhỏ hơn 1. Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}}$

Giải: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\sqrt{2(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2})}\Leftrightarrow\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}$

$(2+a^2+b^2)(1+ab)\le 2(1+a^2+b^2+a^2b^2)\Leftrightarrow a^2+b^2+2a^2b^2-(a^2+b^2)ab-2ab\ge 0$

$(ab-1)(a-b)^2\ge 0$ dấu bằng khi a= b

Bài 24

Gọi R, r là bán kính đ- ờng tròn ngoại, nội tiếp tam giác và r_1 là bán kính đ- ờng tròn qua ba tiếp điểm của đ- ờng tròn nội tiếp với các cạnh tam giác.

Chứng minh: $2r_1\le r\le\sqrt{Rr_1}$

Bài 25

Chứng minh: $(\sqrt[n]{n!})^2\ge\sqrt[n-1]{(n-1)!}\sqrt[n+1]{(n+1)!}$ (với n là các số tự nhiên $n\ge 2$)

Bài 26

a) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$

c) $\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}+\frac{a^2-c^2}{b+c}\ge 0$, hd $\frac{b^2-a^2}{c+a}=\frac{b+a}{c+a}((b+c)-(c+a))$

đặt u = a+b, v=b+c, z = c+a

Bài 27

Cho a, b, c là các số thực d- ơng có tích bằng 1. Chứng minh:

$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(1+c-\frac{1}{c})\le 1$

Giải: Đặt $a=\frac{x}{y}$; $b=\frac{y}{z}$; $c=\frac{z}{x}\Rightarrow abc=xyz$

$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{c})=(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y})(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z})(\frac{z}{x}-1+\frac{x}{z})\le 1$

$(x+z-y)(y+x-z)(z+x-y)\le xyz$ trở lại bài toán đơn giản

Bài 28

a, b, c là ba cạnh tam giác. Chứng minh $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{a^2+c^2}+\frac{c^2+2ba}{b^2+a^2}>3$

H�ớng dẫn : $a^2>(b-c)^2\Rightarrow a^2+2bc>b^2+c^2$

Bài 29

a, b, c, d là các số d- ơng và $\frac{a+b}{c+d}<2$. Chứng minh $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}<8$

H�ớng dẫn :$(c + d)^2 < 2(c^2 + d^2)$, $(a+b)^2 > a^2 + b^2$

$$\frac{a^2+b^2}{2(c^2+d^2)} < \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 < 4$$

Bài 30

a, b, c > 0 . Chứng minh:

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}\ \frac{ab}{c^2+2ab} \le 1 \le \frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

Giải: $b^2 + c^2 \ge 2bc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge a^2 + 2bc \Rightarrow \frac{a^2}{a^2+2bc} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$ từ đó:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$$

VP + 2VT = 3 $\Rightarrow$ 3 = VP + 2VT $\ge$ VT + 2 $\Rightarrow$ VT $\le$ 1

Bài 31

Cho a, b, c là các số thực d- ơng. Chứng minh:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$

Giải: $\left(3-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\right) + \left(3-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\right) + \left(3-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\right) \ge 1$

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)+4(bc-ab-ac)}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{2(a^2+b^2+c^2)+4(ac-ba-bc)}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{2(a^2+b^2+c^2)+4(ab-cb-ac)}{2c^2+(a+b)^2} \ge$$

1 Sử dụng $(x+y)^2 \ge 2(x^2+y^2)$

$$VT \ge \frac{6(a^2+b^2+c^2)+4(bc-ab-ac+ac-ab-bc+ab-bc-ac)}{2a^2+2(b^2+c^2)} \ge 1$$

Bài 32(đề thi ts Nguyễn Trãi)

Cho a, b, c > 0 , a < bc và $1+a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh 1 + a < b + c

Giải: $(1+a)(1-a+a^2) = (b+c)(b^2-bc+c^2)$

$1 + a < b + c \Leftrightarrow 1-a+a^2 > b^2- bc+c^2$

Giả sử $1+a \ge b+c \Rightarrow b^2- bc+c^2 \ge 1-a+a^2 \Rightarrow (b+c)^2 - 3bc \ge (1+a)^2 - 3a > (1+a)^2 - 3bc \Rightarrow$ $(b+c)^2 > (1+a)^2 \Rightarrow b +c >1 + a$

Bài 33

a, b, c là các số thực d- ơng và ab + bc + ca = 1. Chứng minh:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 3(a+b+c)$$

Giải: qui đồng $\Rightarrow$ abc(a+b+c) $\le \frac{1}{3}$

abc(a+b+c) =(abac+bcba+cacb) $\le \frac{(ab+bc+ca)^2}{3} = \frac{1}{3}$ dấu bằng a=b=c=$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 34

Cho các số thực d- ơng a, b, c. Chứng minh:

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \le \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Giải: P = $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \Rightarrow$ P $= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

Với x=b/a; y=c/b; z = a/c $\Rightarrow$ xyz = 1

P > 1 dễ dàng

Sử dụng $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$ với ab <1

Giả sử z $\ge$ 1 $\Rightarrow$ Q = $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$ do xyz =1 ; đặt t=1/z

$\Rightarrow$ Q = $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+t}} \le \frac{\sqrt{2}t}{1+t} + \frac{2}{\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{2}t}{1+t} + \frac{2\sqrt{1+t}}{1+t}$; (1+t $\le \sqrt{2(1+t^2)}$)

$\frac{\sqrt{2}t}{1+t} + \frac{2\sqrt{1+t}}{1+t} \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ 2t + $2\sqrt{2(1+t)} \le$ 3t + 3 bình ph- ơng có: $(t-1)^2 \ge 0$

Bài 35

Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền là a và hai cạnh góc vuông là b, c.

Chứng minh $(b+c)\sqrt{b} + (b-c)\sqrt{c} < \sqrt{2\sqrt{2}a\sqrt{a}}$

Giải: b + c $\le \sqrt{(b+c)^2 + (b-c)^2} = \sqrt{2}$ a;

(b + c)$\sqrt{b}$ + (b - c)$\sqrt{c}$ $\le \sqrt{(b+c)^2+(b-c)^2}\sqrt{b+c} \le \sqrt{2}a\sqrt{\sqrt{2}a}$

dấu bằng không xảy ra: (b + c) : (b - c) = $\sqrt{b} : \sqrt{c} = 1 : 1$

Bài 35

a, b, c $\in$(0; π/2) . Chứng minh:

$$\frac{\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin b\sin(b-c)\sin(b-a)}{\sin(c+a)} + \frac{\sin c\sin(c-a)\sin(c-b)}{\sin(a+b)} \ge 0$$

Chứng minh: Giả sử a $\ge$ b$\ge$ c

P$\ge \frac{\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)}{\sin(b+c)} - \frac{\sin b\sin(a-c)\sin(a-b)}{\sin(c+a)} + \frac{\sin c\sin(a-c)\sin(b-c)}{\sin(a+b)} =$

Bài 36

Sử dụng định lý Lagrăngs (f(x) liên tục [a; b] và có đạo hàm (a; b) $\Rightarrow$ tồn tại c $\in$ (a; b) thoả mãn f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)

Chứng minh rằng x = 5 không là nghiệm bất ph- ơng trình:

$\sin(x+1)\sqrt[3]{\cos x} - \sin x\sqrt[3]{\cos(x+1)} < \sqrt[3]{\cos x\cos(x+1)}$

Giải: $\dfrac{\sin(x+1)}{\sqrt[3]{\cos(x+1)}} - \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} < 1$, xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$, $f'(x) = \dfrac{2\cos^2 x + 1}{3\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$

áp dụng bđt Cosi $\Rightarrow$ $f'(x) > 1$ $\Rightarrow$ f(x+1) - f(x) > 1

Bài 37

$\sin x\sqrt[3]{\cos(x-1)} - \sin(x-1)\sqrt[3]{\cos x} > \sqrt[3]{\cos x\cos(x-1)}$

Chứng minh rằng x = e là nghiệm của bất ph- ơng trình

Giải π > e; e-1 >1, 71828 > $\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ sine>0; sin(e-1) > 0; cose<0; cos(e-1) <0

$f(t) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$; (e-1; e) $\subset$ $(\dfrac{\pi}{2};\pi)$; f(e)-f(e-1) > 1

Ph- ơng pháp dồn biến

Để chứng minh $f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$ ta đ- a về

$f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge f(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2}, x_3..., x_n)$

Hoặc $f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge f(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{x_1+x_2}{2}, x_3..., x_n)$

chứng minh $f(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2}, x_3..., x_n) \ge 0$ hoặc $f(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{x_1+x_2}{2}, x_3..., x_n) \ge 0$

Bài 36: a, b, c > 0 và abc = 1

Chứng minh $a^2 + b^2 c^2 + 3 \ge ab + bc + ca + a + b + c$

Giải: $f(a, b, c) = a^2 + b^2 c^2 + 3 - (ab + bc + ca + a + b + c)$

$f(a,b,c) - f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) = (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2[(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 - a - 1]$

$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \ge 4\sqrt{bc} = \dfrac{4}{\sqrt{a}} \ge 4 > 1 + a$

Chứng minh $f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) \ge 0$; $a^2 + (\dfrac{1}{\sqrt{a}} - 1)^2 + 2 \ge a + 2\sqrt{a}$

$a^2+2 \ge 2a + 1 \ge a + 2\sqrt{a}$

Bài 37: Cho a, b, c là các số d- ơng. Chứng minh

$$2(a^2+b^2+c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge (a+b+c)^2$$

Xét $f(a,b,c) = 2(a^2+b^2+c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - (a+b+c)^2$, giả sử a $\le$ b$\le$ c

$f(a,b,c) - f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) = 2(a^2+b^2+c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - (a+b+c)^2$ -

$2(a^2+2bc) - 3\sqrt{a^2b^2c^2} + (a+2\sqrt{bc})^2 = (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2[(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 - 2a]$

dễ dàng chứng minh b + c ≥ 2a

Chứng minh: $2(a^2+2bc)+3\sqrt{a^2b^2c^2}-(a+2\sqrt{bc})^2 \geq 0$

$a^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 4a\sqrt{bc}$ (cosi cho 4 số)