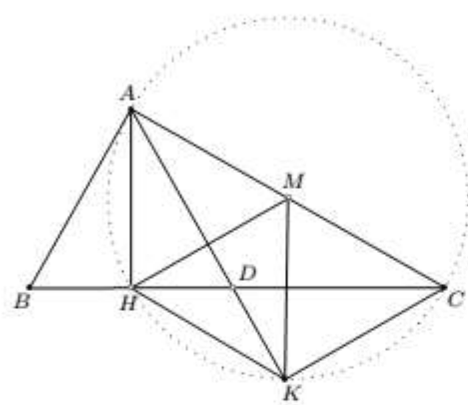
Các câu hình Oxy trong các đề thi đại học ,thực chất là các bài toán dựng hình,do đó bài toán có thể vô nghiệm,có thể có 1 lời giải hoặc nhiều lời giải.Để làm các bài toán dựng hình ta phải xem xét nhiều khả năng xảy ra ,biện luận nhiều trường hợp nếu cách giải của bài toán không duy nhất, ngoài ra phải để ý đên sự tồn tại của lời giải.

Ở câu hình Oxy năm 2015

Câu 8 (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử $H(-5;-5)$, $K(9;-3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng $x-y+10=0$. Tìm tọa độ điểm A.

Với giả thiết D là điểm đối xứng của B qua H,ta cần xem xét các khả năng :

a)<u>AB<AC</u> khi đó D nằm giữa H và C và lời giải như đáp án



Gọi M là trung điểm AC. Ta có $MH = MK = \dfrac{AC}{2}$, nên M thuộc đường trung trực của HK. Đường trung trực của HK có phương trình $7x + y - 10 = 0$, nên tọa độ của M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y + 10 = 0 \\ 7x + y - 10 = 0. \end{cases}$

Suy ra $M(0;10)$.

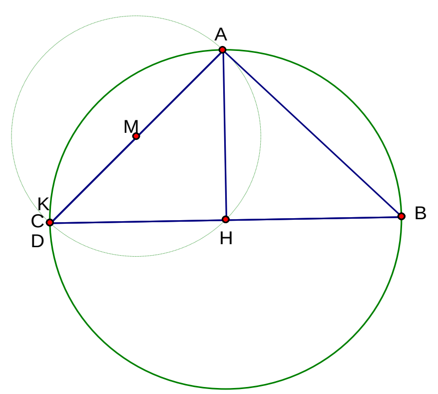
Ta có $\widehat{HKA} = \widehat{HCA} = \widehat{HAB} = \widehat{HAD}$, nên ΔAHK cân tại H, suy ra $HA = HK$. Mà $MA = MK$, nên A đối xứng với K qua MH.

Ta có $\overrightarrow{MH} = (5;15)$; đường thẳng MH có phương trình $3x - y + 10 = 0$. Trung điểm AK thuộc MH và $AK \perp MH$ nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ

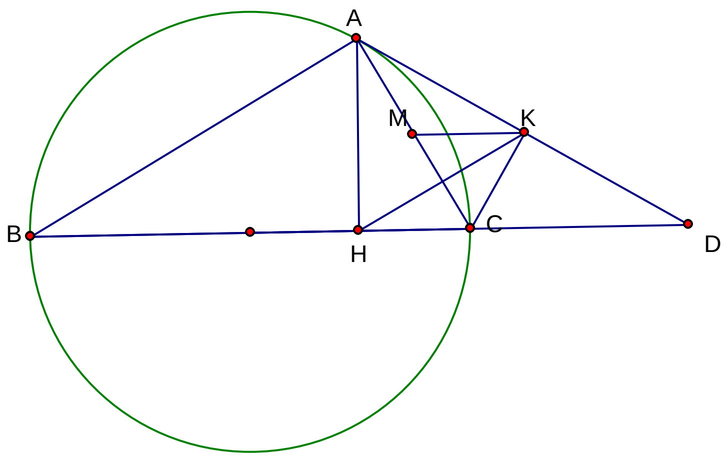
$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{x+9}{2}\right) - \left(\dfrac{y-3}{2}\right) + 10 = 0 \\ (x-9) + 3(y+3) = 0. \end{cases}$$

Suy ra $A(-15;5)$.

b)<u>AB=AC</u> khi đó D trùng với C các lập luận như trường hợp a) vẫn còn đúng



c)<u>AB>AC</u> khi đó B nằm giữa C D và H và lời giải có thể giống trường hợp a),có thể khác trường hợp a).



<u>Bình luận</u>:

Cách chứng minh trong đáp án,rất khôn khéo ,trong cả 3 trường hợp trên,chứng minh A và K đối xứng với nhau qua MH đều phù hợp (nhưng dễ thấy là dài dòng ở trường hợp AB=AC).

<u>Vấn đề đặt ra ở đây là:</u>

1) Phải xét đủ 3 trường hợp thì lời giải chứng minh A và K đối xứng với nhau qua MH mới cho là đúng.
2) Giải tiếp bài toán,khi tìm được A(-15;5) thì bài toán có phải đã xem là chứng minh xong hay chưa?

Nếu dễ dãi,đa số đều chấp nhận lời giải đến đây là xong.

Thử tìm C và B ta có C(15;15) và B(-10;-10) .Như vậy bài toán *<u>chỉ xảy ra</u>* trong trường hợp AB<AC.

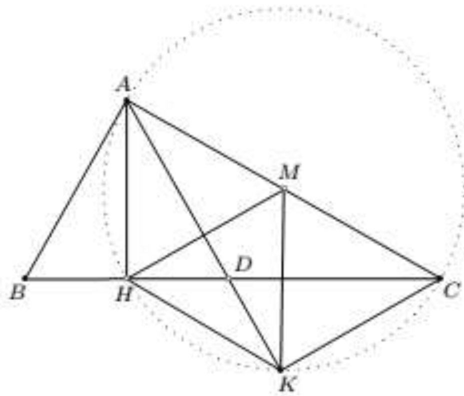
<u>Vấn đề mới nảy sinh:</u>

1) Cách chứng minh như đáp án có đầy đủ không khi không xét trường hợp tồn tại của bài toán?
2) Có thể xem là dư không khi xét hai trường hợp còn lại,vì điều kiện đủ chỉ cho kết quả AB<AC?
3) Có cách giải nào không cần xét cả 3 trường hợp mà vẫn dẫn tới kết quả không?

Câu trả lời không đơn giản cho loại toán oxy hiện nay trong các bài thi đại học !

Để hiểu rõ cách trình bày lời giải ta thử cho các lời giải sau đây bao nhiêu điểm:

<u>Lời giải 1</u>



Gọi M là trung điểm AC. Ta có $MH = MK = \dfrac{AC}{2}$, nên M thuộc đường trung trực của HK. Đường trung trực của HK có phương trình $7x + y - 10 = 0$, nên tọa độ của M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y + 10 = 0 \\ 7x + y - 10 = 0. \end{cases}$

Suy ra $M(0; 10)$.

Ta có $\widehat{HKA} = \widehat{HCA} = \widehat{HAB} = \widehat{HAD}$, nên ΔAHK cân tại H, suy ra $HA = HK$. Mà $MA = MK$, nên A đối xứng với K qua MH.

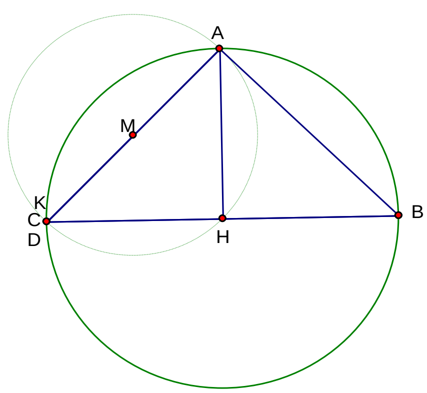
Ta có $\overrightarrow{MH} = (5; 15)$; đường thẳng MH có phương trình $3x - y + 10 = 0$. Trung điểm AK thuộc MH và $AK \perp MH$ nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{x+9}{2}\right) - \left(\dfrac{y-3}{2}\right) + 10 = 0 \\ (x-9) + 3(y+3) = 0. \end{cases}$$

Suy ra $A(-15; 5)$.

<u>Lời giải 2:</u>

Xét AB=AC khi đó D trùng với C, K trùng với C .



Gọi M là trung điểm AC. Ta có $MH = MK = \dfrac{AC}{2}$, nên M thuộc đường trung trực của HK. Đường trung trực của HK có phương trình $7x + y - 10 = 0$, nên tọa độ của M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y + 10 = 0 \\ 7x + y - 10 = 0. \end{cases}$

Suy ra $M(0; 10)$.

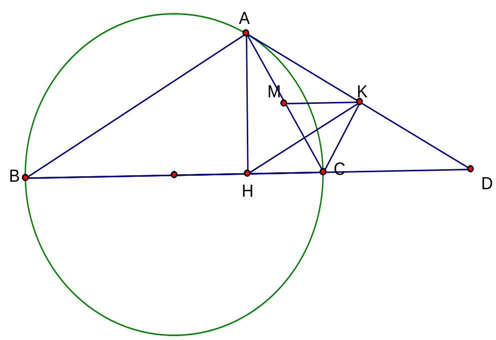
Ta có $\widehat{HKA} = \widehat{HCA} = \widehat{HAB} = \widehat{HAD}$, nên ΔAHK cân tại H, suy ra $HA = HK$. Mà $MA = MK$, nên A đối xứng với K qua MH.

Ta có $\overrightarrow{MH} = (5; 15)$; đường thẳng MH có phương trình $3x - y + 10 = 0$. Trung điểm AK thuộc MH và $AK \perp MH$ nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{x+9}{2}\right) - \left(\dfrac{y-3}{2}\right) + 10 = 0 \\ (x-9) + 3(y+3) = 0. \end{cases}$$

Suy ra $A(-15; 5)$.

Lời giải 3:



Gọi M là trung điểm AC. Ta có $MH = MK = \frac{AC}{2}$, nên M thuộc đường trung trực của HK. Đường trung trực của HK có phương trình $7x + y - 10 = 0$, nên tọa độ của M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y + 10 = 0 \\ 7x + y - 10 = 0. \end{cases}$
Suy ra $M(0; 10)$.

Ta có $\widehat{HKA} = \widehat{HCA} = \widehat{HAB} = \widehat{HAD}$, nên ΔAHK cân tại H, suy ra $HA = HK$. Mà $MA = MK$, nên A đối xứng với K qua MH.

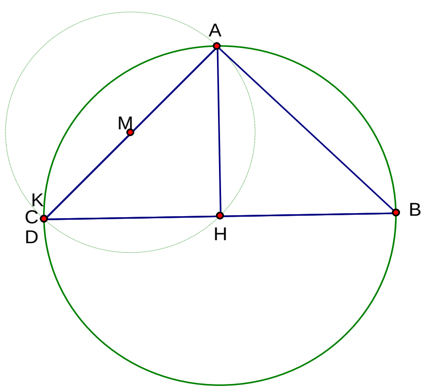
Ta có $\overrightarrow{MH} = (5; 15)$; đường thẳng MH có phương trình $3x - y + 10 = 0$. Trung điểm AK thuộc MH và $AK \perp MH$ nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 3\left(\frac{x+9}{2}\right) - \left(\frac{y-3}{2}\right) + 10 = 0 \\ (x-9) + 3(y+3) = 0. \end{cases}$$

Suy ra $A(-15; 5)$.

Lời giải 4:

Xét AB=AC khi đó D trùng với C, K trùng với C .



Tam giác AHK vuông cân tại H

Từ H(-5;-5) và K(9;-3) ta suy ra được hai điểm :A(-7;9) và A(-3;-19)

Ghi chú: Cách chứng minh này không sử dụng giả thiết trung điểm M của AC thuộc x-y+10=0

Yêu cầu giải thích tại sao lại cho điểm như vậy!

Theo bạn cách trình bày lời giải như thế nào mới đúng?