

LƯỢNG GIÁC

Phần 1: Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

A. Kiến thức cần nhớ

1. Các hằng đẳng thức cơ bản

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

c) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

d) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

e) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

f) $\tan x \cdot \cot x = 1$

2. Giá trị của các hàm lượng giác cung liên quan đặc biệt

a) Hai cung đối nhau

2π

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\cot(-x) = -\cot x$

b) Hai cung bù nhau

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$

$\cot(\pi - x) = -\cot x$

c) Hai cung khác nhau

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\tan(x + 2\pi) = \tan x$

$\cot(x + 2\pi) = \cot x$

d) Hai cung khác nhau π

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

$\cot(\pi + x) = \cot x$

e) Hai cung phụ nhau

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

B. Bài tập

1. Tìm các giá trị của α để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

$$A = \frac{1}{1 + \sin \alpha} \quad ; \quad B = \frac{1}{1 - \cos \alpha}$$

2. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin 123^\circ - \sin 132^\circ$

b) $\cot 304^\circ - \cot 316^\circ$

3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5 \tan 540^\circ + 2 \cos 1170^\circ + 4 \sin 990^\circ - 3 \cos 540^\circ$

b) $3 \sin \frac{25\pi}{6} - 3 \tan \frac{13\pi}{4} + 2 \cos \frac{19\pi}{3}$

c) $\sin^2 15^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 75^\circ$

d) $\cos^2 15^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 75^\circ$

e) $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$

f) $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{3\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{12} + \cos^2 \frac{9\pi}{12} + \cos^2 \frac{11\pi}{12}$

g) $\sin(\pi + a) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \cot(2\pi - a) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$

h) $A = \sin^4 a + \cos^2 a + \sin^2 a \cdot \cos^2 a$

$$i) B = \frac{\left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right)^2 - 1}{\tan \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}}$$

$$j) C = \frac{\cos^2 696^\circ + \tan(-260^\circ) \cdot \tan 530^\circ - \cos^2 156^\circ}{\tan^2 252^\circ + \cot^2 342^\circ}$$

$$k) \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - b\right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - b) \right]^2$$

$$l) \left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \right) \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} - \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \right)$$

$$m) \sin^3 a(1 + \cot a) + \cos^3 a(1 + \tan a)$$

$$n) \frac{\tan b}{\tan b + \cot b}$$

$$o) \frac{1 - \cos^4 a - \sin^4 a}{\cos^4 a}$$

$$p) \frac{\sin(x - \pi) \cdot \cos(x - 2\pi) \cdot \sin(2\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cot(\pi - x) \cdot \cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

$$q) \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) \right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x) \right]^2$$

$$r) \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{3} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{3} + a\right) + \tan(\pi + a) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)$$

$$s) \frac{\cot(5,5\pi - a) + \tan(b - 4\pi)}{\cot(a - 6\pi) - \tan(b - 3,5\pi)}$$

$$t) \tan 50^\circ \cdot \tan 190^\circ \cdot \tan 250^\circ \cdot \tan 260^\circ \cdot \tan 400^\circ \cdot \tan 700^\circ$$

4. Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh:

$$a) \sin(A + B) = \sin C; \cos(B + C) = -\cos A$$

$$c) \tan(A + C) = -\tan B; \cot(A + B) = -\cot C$$

$$b) \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}; \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$$

$$d) \tan \frac{A+C}{2} = \cot \frac{B}{2}; \cot \frac{A+B}{2} = \tan \frac{C}{2}$$

5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$

6. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số trong khoảng $-\pi < x < \pi$: $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$.

7. Gọi a, b, c là các cạnh đối diện với các góc tương ứng của tam giác ABC.

a) Cho $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$. Chứng minh $A \leq 60^\circ$.

b) $2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

c) Chứng minh: $0 < \sin A + \sin B + \sin C - \sin A \cdot \sin B - \sin B \cdot \sin C - \sin C \cdot \sin A < 1$

Phần 2: Các công thức lượng giác

I. Công thức cộng

A. Kiến thức cần nhớ

1) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$

3) $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

2) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

B. Bài tập

1. Chứng minh các công thức sau:

a) $\cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$

b) $\cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$

2. Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$

b) $\cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cdot \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cdot \cos 79^\circ$

c) $(\tan a - \tan b) \cdot \cot(a - b) - \tan a \cdot \tan b$

3. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

b) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

c) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

d) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$

4. a) Cho $a - b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh: $\frac{1 + \tan b}{1 - \tan b} = \tan a$ và $\frac{1 - \tan a}{1 + \tan a} = -\tan b$.

b) Cho $a + b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh: $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$ và $(1 - \cot a)(1 - \cot b) = 2$

c) Cho $\frac{\tan(x+a)}{\tan(a-y)} = \frac{m}{n}$. Chứng minh: $\tan(x+y) = \frac{a-b}{1+ab}$.

d) Cho $\tan a = \frac{2}{5}$, $\tan b = \frac{3}{7}$ ($0 < a, b < 1v$). Tìm $a + b$.

e) Cho $\tan a = -\frac{1}{2}$ ($\frac{\pi}{2} < a < \pi$) và $\tan b = 3$ ($0 < b < \frac{\pi}{2}$). Tìm $a + b$.

f) Cho $\tan a = 1\frac{2}{3}$, $\tan b = \frac{1}{4}$ ($0 < a, b < 1v$). Tìm $a - b$.

g) Cho $\tan a = \frac{1}{12}$, $\tan b = \frac{2}{5}$, $\tan c = \frac{1}{3}$. Chứng minh $a + b + c = 45^\circ$.

5. Tìm giá trị các hàm số lượng giác góc: 15° hoặc $\frac{\pi}{12}$ và 75° hoặc $\frac{5\pi}{12}$.

6. Cho α, β, γ thỏa mãn điều kiện: $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} + \sqrt{1 + \tan \beta \cdot \tan \gamma} + \sqrt{1 + \tan \gamma \cdot \tan \alpha}$$

7. Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác A, B, C thỏa mãn một trong các đẳng thức sau thì tam giác ABC cân:

a) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

b) $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$

c) $a + b = \tan \frac{A}{2} (a \tan A + b \tan B)$

d) $\tan A + 2 \tan B = \tan A \cdot \tan^2 B$

II. Công thức nhân đôi nhân ba.

A. Lý thuyết cần nhớ

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$

$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

B. Bài tập

1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{\sin 3a \cos a - \cos 3a \sin a}$

b) $\frac{\tan^2 \frac{\pi}{8} - 1}{\tan \pi/8}$

c) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$

d) $2 \sin a \cos a (\cos^2 a - \sin^2 a)$

e) $\cos^4 a - 6 \sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a$

f) $\cos^2 a - 4 \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{a}{2}$

g) $1 - 8 \sin^2 a \cos^2 a$

h) $8 \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$

i) $4 \sin^3 a \cos 3a + 4 \cos^3 a \sin 3a$

j) $4 \sin^4 4a + \sin^2 2a$

k) $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$

l) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$

m) $\tan a + 2 \tan 2a + 4 \tan 4a + 8 \tan 8a + 16 \tan 16a + 32 \tan 32a$

n) $\frac{\sin^3 a + \sin 3a}{\cos^3 a - \cos 3a}$

o) $\frac{\cos a - \cos 3a}{\sin a + \sin 3a}$

2. Chứng minh:

a) $\sin a \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \frac{1}{4} \sin 3a$. Áp dụng với $a = \frac{\pi}{9}$.

b) $8 \sin^3 18 + 8 \sin^2 18 = 1$

c) $8 + 4 \tan \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} = \cot \frac{\pi}{32}$

d) $\tan^2 36^\circ \tan^2 72^\circ = 5$

e) $\cos a \cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \frac{1}{4} \cos 3a$. Tính: $\cos \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} \cos \frac{7\pi}{18}$

f) $\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$

g) $\tan a \tan\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \tan 3a$. Chứng minh: $\tan 6^\circ \tan 54^\circ \tan 66^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

3. a) Cho $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ ($a, b > 0$). Tìm $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

b) Cho $\cos \alpha = \frac{2a}{1+a^2}$. Tìm $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

c) Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tìm $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

4. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$ c) $y = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

III. Công thức hạ bậc. Công thức viết các hàm lượng giác theo $t = \tan \frac{a}{2}$.

A. Lý thuyết cần nhớ

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2a &= 2\cos^2 a & \sin a &= \frac{2t}{1+t^2} & \cos a &= \frac{1-t^2}{1+t^2} & \tan a &= \frac{2t}{1-t^2} \\ 1 - \cos 2a &= 2\sin^2 a \end{aligned}$$

B. Bài tập

1. Chứng minh các biểu thức sau:

a) $\frac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a} = \tan^2 \frac{a}{2}$ b) $\frac{1 - \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a + \cos 2a} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$

c) $(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4\cos^2 \frac{a+b}{2}$ d) $\tan \frac{a}{2} = \cot \frac{a}{2} - 2\cot a$

e) $\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} = \cot^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$ f) $\tan 7^\circ 30' = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$

g) $\sin a(\sin a + \sin b) + \cos a(\cos a + \cos b) = 2\cos^2 \frac{a-b}{2}$

h) $(\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2 = 4\sin^2 \frac{a-b}{2}$

i) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin a}} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{1 + \sin a}}$ ($0 < a < \pi$)

2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha}}$ ($0 < \alpha \leq \pi$)

b) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha}}$ ($0 < \alpha \leq \pi$)

c) $\frac{2\cot \frac{a}{2}}{1 + \cot^2 \frac{a}{2}}$

d) $\frac{\cot \frac{a}{2} - \tan \frac{a}{2}}{\cot \frac{a}{4} + \tan \frac{a}{4}}$

$$e) \frac{\tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2}} + \frac{\tan \frac{a}{2}}{1 - \tan \frac{a}{2}}$$

$$g) \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$$

3. Tìm giá trị biểu thức

$$a) \frac{\sin a}{3 - 2 \cos a} \text{ biết } \tan \frac{a}{2} = 2$$

4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$a) y = 2 \cos 2x + \sin^2 x$$

$$c) y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + (\sin x - \cos x)^2$$

$$f) \frac{1}{1 - \tan \frac{a}{2}} - \frac{1}{1 + \tan \frac{a}{2}}$$

$$h) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$b) \frac{\tan a + \sin a}{\tan a - \sin a} \text{ Biết } \tan \frac{a}{2} = \frac{2}{15}$$

$$b) y = 2 \sin^2 x - \cos 2x$$

IV. Công thức biến đổi tổng và tích

A. Lý thuyết cần nhớ

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$\cot a - \cot b = -\frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}$$

B. Bài tập

1. Rút gọn biểu thức

$$a) \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b) \frac{\cos a - \cos 3a + \cos 5a - \cos 7a}{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a}$$

$$d) \cos a - \frac{\cos \left(2a - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(2a + \frac{\pi}{6} \right)}{2 \cos a}$$

$$f) \cos 2a \cos^2 a - \frac{1}{4} \cos 4a - \frac{1}{2} \cos 2a$$

$$c) \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}$$

$$e) \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}$$

$$g) \cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2$$

h) $\sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2\sin 203^\circ (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ)$

i) $\cos 35^\circ + \cos 125^\circ + 2\sin 185^\circ (\sin 130^\circ + \sin 140^\circ)$

j) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$

k) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ$

2. Chứng minh:

a) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

b) $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \dots + \sin(2n-1)a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \dots + \cos(2n-1)a} = \tan na$

c) $\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin na = \frac{\sin \frac{na}{2} \sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$

d) $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos na = \frac{\sin \frac{na}{2} \cos \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$

3. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

c) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

d) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

e) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

f) $\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1$

g) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

h) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$

i) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$

4. Chứng minh bất đẳng thức: $\sin \frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$ với $0 < x, y < \pi$.

5. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$

b) $\tan 67^\circ 5' - \cot 67^\circ 5' + \cot 7^\circ 5' - \tan 7^\circ 5'$

c) $\cos 5^\circ \cos 55^\circ \cos 65^\circ$

d) $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$

6. Chứng tỏ các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x:

a) $\sqrt{4 \sin^4 x + \sin^2 2x} + 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

b) $4 \cos^4 x + \cos^2 2x - 4 \cos^2 x \cos 2x$

c) $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

d) $\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

7. Điều kiện cần và đủ để một tam giác vuông ở A là: $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos A + \cos B}$

8. Chứng minh nếu các góc của ΔABC thoả mãn: $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$ thì nó là tam giác đều.

9. Chứng minh rằng nếu các cạnh và các góc của ΔABC thoả mãn hệ thức: $\cos A + \cos B = \frac{b+c}{a}$ thì tam giác đó là tam giác vuông.

10. Cho tam giác ABC và $5 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$. Chứng minh rằng: $3c = 2(a+b)$.