Chuyên đề 1

DÃY SỐ VIẾT THEO QUI LUẬT - DÃY CÁC PHÂN SỐ VIẾT THEO QUI LUẬT

A- Kiến thức cần nắm vững:

I. Dãy số viết theo qui luật:

1) Dãy cộng

1.1) Xét các dãy số sau:

a) Dãy số tự nhiên: 0; 1; 2; 3; 4;... (1)

b) Dãy số lẻ: 1; 3; 5; 7;... (2)

c) Dãy các số chẵn: 0; 2; 4; 6;.... (3)

d) Dãy các số tự nhiên lớn hơn 1 chia cho 3 dư 1: 4; 7; 10; 13;... (4)

Trong 4 dãy số trên, mỗi số hạng kể từ số hạng thứ 2, đều lớn hơn số hạng đứng liền trước nó cùng một số đơn vị:

+) Số đơn vị là 1 ở dãy (1)

+) Số đơn vị là 2 ở dãy (1) và (2)

+) Số đơn vị là 3 ở dãy (4)

Khi đó ta gọi dãy các trên là "dãy cộng"

1.2) Công thức tính số hạng thứ n của một dãy cộng (khi biết n và d)

- Xét dãy cộng $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n$ trong đó $a_2 = a_1 + d$. Ta có:

$a_3 = a_1 + 2d$; $a_4 = a_1 + 3d$;...

Tổng quát: $a_n = a_1 + (n-1)d$ (I)

Trong đó : n gọi là số số hạng của dãy cộng

d hiệu giữa hai số hạng liên tiếp

Từ (I) ta có: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ (II)

Công thức (II) giúp ta tính được số số hạng của một dãy cộng khi biết : Số hạng đầu a_1, số hạng cuối a_n và hiệu d giữa hai số hạng liên tiếp.

1.3) Để tính tổng S các số hạng của dãy cộng: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n$. Ta viết:

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Nên $2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n)n$

Do đó: $S = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$ (III)

Chú ý: Trường hợp đặc biệt tổng của n số tự nhiên liên tiếp bắt đàu từ 1 là

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

B- BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm chữ số thứ 1000 khi viét liên tiếp liền nhau các số hạng của dãy số lẻ 1; 3; 5; 7;...

Bài 2: a) Tính tổng các số lẻ có hai chữ số

b) Tính tổng các số chẵn có hai chữ số

c) Tính: $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$ với $(n \in N)$

d) Tính: $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ với $(n \in N^*)$

Bài 3: Có số hạng nào của dãy sau tận cùng bằng 2 hay không?

$1; 1+2; 1+2+3; 1+2+3+4; ...$

H□ớng dẫn: Số hạng thứ n của dãy bằng: $\frac{n(n+1)}{2}$

Nếu số hạng thứ n của dãy có chữ số tận cùng bằng 2 thì n(n + 1) tận cùng bằng 4. Điều này vô lí vì n(n + 1) chỉ tận cùng bằng 0, hoặc 2, hoặc 6.

Bài 4: a) Viết liên tiếp các số hạng của dãy số tự nhiên từ 1 đến 100 tạo thành một số A. Tính tổng các chữ số của A

b) Cũng hỏi như trên nếu viết từ 1 đến 1000000

Hướng dẫn: a) ta bổ sung thêm chữ số 0 vào vị trí đầu tiên của dãy số (không làm thay đổi kết quả). Tạm chưa xét số 100. Từ 0 đến 99 có 100 số, ghép thành 50 cặp: 0 và 99; 1 và 98; 2 và 97;… mỗi cặp có tổng các chữ số bằng 18. Tổng các chữ số của 50 cặp bằng: 18.50 = 900. Thêm số 100 có tổng các chữ số bằng 1. ĐS: 901

b) Tương tự: ĐS: 27000001

Bài 5: Cho
$$\begin{aligned} S_1 &= 1+2, \\ S_2 &= 3+4+5, \\ S_3 &= 6+7+8+9, \\ S_4 &= 10+11+12+13+14, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Tính S_{100} ?

Hướng dẫn: Số số hạng của S_1,..., S_{99} theo thứ tự bằng 2; 3; 4; 5; …100

ĐS: S_{100} = 515100

Bài 6: Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số 100! chứa thừa số nguyên tố 7 với số mũ băng bao nhiêu?

Bài 7: Tính số hạng thứ 50 của các dãy sau:

a) 1.6; 2.7; 3.8; ...

b) 1.4; 4.7; 7.10;...

Bài 8: Cho $A = 1+3+3^2+3^3+...+3^{20}$; $B = 3^{21}:2$

Tính $B - A$

Bài 9: Tính các tổng sau:

$a)\ A = 1+2+2^2+2^3+...+2^{2007}$

$b)\ B = 1+2+2^2+2^3+...+2^n$

$c)\ C = 1+2^2+2^4+...+2^{2008}$

$d)\ D = 1+2^2+2^4+...+2^{2n}$

$e)\ E = 2+2^3+2^5+...+2^{2007}$

$f)\ F = 2+2^3+2^5+...+2^{2n+1}$

Bài 10: Tổng quát của bài 8

Tính : a) $S = 1+a+a^2+a^3+...+a^n$, với ($a \geq 2,\ n \in N$)

b) $S_1 = 1+a^2+a^4+a^6+...+a^{2n}$, với ($a \geq 2,\ n \in N$)

c) $S_2 = a+a^3+a^5+...+a^{2n+1}$, với ($a \geq 2,\ n \in N^*$)

Bìa 11: Cho $A = 1+4+4^2+4^3+...+4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$.

Bài 12: Tính giá trị của biểu thức:

$a)\ A = 9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{50\text{ chữ số}}$

$b)\ B = 9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{200\text{ chữ số}}$

(NCPTT6T1)

SUY NGHĨ TRÊN MỖI BÀI TOÁN

Giải hàng trăm bài toán mà chỉ cốt tìm ra đáp số và dừng lại ở đó thì kiến thức thu lượm được chẳng là bao. Còn giải ít bài tập mà lại luôn suy nghĩ trên mỗi bài đó, tìm thêm cách giải, khai thác thêm những ý của bài toán, đó là con đường tốt để đi lên trong học toán.

Dưới đây là một thí dụ.

Bài toán 1 : Cho A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 và B = A.3. Tính giá trị của B.

Lời giải 1 : Theo đề bài ta có :

B = (1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10).3 = 1.2.(3 - 0) + 2.3.(4 - 1) + 3.4.(5 - 2) + 4.5.(6 - 3) + 5.6.(7 - 4) + 6.7.(8 - 5) + 7.8.(9 - 6) + 8.9.(10 - 7) + 9.10.(11 - 8) = 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - … + 8.9.10 - 8.9.10 + 9.10.11 = 9.10.11 = 990.

Trước hết, ta nghĩ ngay rằng, nếu bài toán yêu cầu chỉ tính tổng A, ta có : A = B/3 = 330

Bây giờ, ta tạm thời quên đi đáp số 990 mà chỉ chú ý tới tích cuối cùng 9.10.11, trong đó 9.10 là số hạng cuối cùng của A và 11 là số tự nhiên kề sau của 10, tạo thành tích ba số tự nhiên liên tiếp. Ta dễ dàng nghĩ tới kết quả sau :

Nếu A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + … + (n - 1).n thì giá trị của B = A.3 = (n - 1).n.(n + 1). Các bạn có thể tự kiểm nghiệm kết quả này bằng cách giải tương tự như trên.

Bây giờ ta tìm lời giải khác cho bài toán.

Lời giải 2 :

B = (1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10).3 = (0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10).3 = [1.(0 + 2) + 3.(2 + 4) + 5.(4 + 6) + 7.(6 + 8) + 9.(8 + 10)].3 = (1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + 7.7.2 +9.9.2).3 = $(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$.2.3 = $(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$.6.

Ta chưa biết cách tính tổng bình phương các số lẻ liên tiếp bắt đầu từ 1, nhưng liên hệ với lời giải 1, ta có :

$(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$.6 = 9.10.11, hay

$(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$ = 9.10.11/6

Hoàn toàn hợp lí khi ta nghĩ ngay đến bài toán tổng quát :

Bài toán 2 : Tính tổng :

$P = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n + 1)^2$

Kết quả : P = (2n + 1)(2n + 2)(2n + 3)/6

Kết quả này có thể chứng minh theo một cách khác, ta sẽ xem xét sau.

Loạt bài toán sau là những kết quả liên quan đến bài toán 1 và bài toán 2.

Bài toán 3 : Tính tổng :

$Q = 11^2 + 13^2 + 15^2 + \ldots + (2n + 1)^2$.

Bài toán 4 : Cho A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 và C = A + 10.11. Tính giá trị của C. Theo cách tính A của bài toán 1, ta được kết quả là : C = 10.11.12/3

Theo lời giải 2 của bài toán 1, ta đi đến kết quả : C = $2.(2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2)$. Tình cờ, ta lại có kết quả của bài toán tổng quát : tính tổng bình phương của các số tự nhiên chẵn liên tiếp, bắt đầu từ 2.

Bài toán 5 : Chứng minh rằng :

$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$ = 2n.(2n + 1).(2n + 2)/6

Từ đây, ta tiếp tục đề xuất và giải quyết được các bài toán khác.

Bài toán 6 :

Tính tổng : $20^2 + 22^2 + \ldots + 48^2 + 50^2$.

Bài toán 7 : Cho n thuộc N*. Tính tổng :

$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + \ldots + (n + 100)^2$.

Hướng dẫn giải : Xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ ; áp dụng kết quả bài toán 2, bài toán 5 và cách giải bài toán 3.

Bài toán chỉ có một kết quả duy nhất, không phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của n.

Bài toán 8 : Chứng minh rằng :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ = n.(n + 1)(2n + 1)/6

Lời giải 1 :

Xét trường hợp n chẵn :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (n – 1)^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + n^2)$

= [(n – 1).n.(n + 1) + n.(n + 1).(n + 2)]/6

= n.(n + 1).(n -1 + n + 2)/6 = n.(n + 1).(2n + 1)/6

Tương tự với trường hợp n lẻ, ta có đpcm.

Lời giải 2 : Ta có :
$1^3 = 1^3$
$2^3 = (1 + 1)^3 = 1^3 + 3.1^2.1 + 3.1.1^2 + 1^3$ $3^3 = (2 + 1)^3 = 2^3 + 3.2^2.1 + 3.2.1^2 + 1^3$ ……… $(n + 1)^3 = n^3 + 3.n^2.1 + 3.n.1^2 + 1^3$.
Cộng từng vế của các đẳng thức trên :
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n + 1)^3 = = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n + 1)$
$\Rightarrow (n + 1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n + 1)$
$\Rightarrow 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = (n + 1)^3 – 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) – (n + 1)$
$= (n + 1)^2.(n + 1) – 3.n.(n + 1)/2 – (n + 1)$
$= (n + 1)[2(n + 1)^2 – 3n + 2]/2$
$= (n + 1).n.(2n + 1)/2$
$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (n + 1).n.(2n + 1)/6$

Bài toán 9 : Tính giá trị biểu thức :
$A = - 1^2 + 2^2 – 3^2 + 4^2 - \ldots - 19^2 + 20^2$.

Lời giải : Đương nhiên, ta có thể tách $A = (2^2 + 4^2 + \ldots + 20^2) – (1^2 + 3^2 + \ldots + 19^2)$; tính tổng các số trong mỗi ngoặc đơn rồi tìm kết quả của bài toán. Song ta còn có cách giải khác như sau :
$A = (2^2 -1^2) + (4^2 – 3^2) + \ldots + (20^2 -19^2) = (2 + 1)(2 – 1) + (4 + 3)(4 – 3) + \ldots + (20 + 19)(20 – 19) = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 + 39 = (3 + 39).10/2 = 210$.
Trở lại bài toán 1. Phải chăng bài toán cho B = A.3 vì 3 là số tự nhiên liền sau của 2 trong nhóm đầu tiên : 1.2. Nếu đúng như thế thì ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán 10 : Tính A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + 6.7.8 + 7.8.9 + 8.9.10.

Lời giải :
A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + 6.7.8 + 7.8.9 + 8.9.10 = (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + 5.6.7 + 6.7.8 + 7.8.9 + 8.9.10).4/4 = [1.2.3.(4 – 0) + 2.3.4.(5 – 1) + … + 8.9.10.(11 – 7)] : 4 = (1.2.3.4 – 1.2.3.4 + 2.3.4.5 – 2.3.4.5 + … + 7.8.9.10 – 7.8.9.10 + 8.9.10.11) : 4 = 8.9.10.11/4 = 1980.
Tiếp tục hướng suy nghĩ trên, ta có ngay kết quả tổng quát của bài toán 10 :

Bài toán 11 : Tính A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + … + (n – 1).n.(n + 1).
Đáp số : A = (n -1).n.(n + 1)(n + 2)/4 <DD.BàI
Các bạn thấy đấy ! Chỉ với bài toán 1, nếu chịu khó tìm tòi, suy nghĩ, ta có thể tìm được nhiều cách giải, đề xuất được những bài toán thú vị, thiết lập được mối liên hệ giữa các bài toán.
Kết quả tất yếu của quá trình tìm tòi suy nghĩ trên mỗi bài toán, đó là làm tăng năng lực giải toán của các bạn.
Chắc chắn còn nhiều điều thú vị xung quanh bài toán 1. Các bạn hãy cùng tiếp tục suy nghĩ nhé.

II- Dãy các phân số viết theo qui luật:

**** Các công thức cần nhớ đến khi giải các bài toán về dãy các phân số viết theo qui luật:***

1) $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

2) $\dfrac{k}{n(n+1)} = k \cdot \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

3) $\dfrac{1}{n(n+k)} = \dfrac{1}{k} \cdot \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+k}\right)$.

4) $\dfrac{k}{n(n+k)} = \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+k}\right)$.

5) $\dfrac{1}{2n(2n+2)} = \dfrac{1}{4n(n+1)} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+2}\right) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

6) $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}\right)$.

7) $\dfrac{1}{n.(n+1)} < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(n-1).n}$.

(Trong đó:** $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$**)

TỪ MỘT BÀI TOÁN TÍNH TỔNG

Chúng ta cùng bắt đầu từ bài toán tính tổng rất quen thuộc sau :

Bài toán A :
Tính tổng :

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{43.44}+\frac{1}{44.45}$$

Lời giải :

$$A=\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+\ldots+\frac{44-43}{43.44}+\frac{45-44}{44.45}$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{43}-\frac{1}{44}+\frac{1}{44}-\frac{1}{45}$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}$$

Vì 1 . 2 = 2 ; 2 . 3 = 6 ; ... ; 43 . 44 = 1892 ; 44 . 45 = 1980 ta có bài toán khó hơn chút xíu.
Bài 1 : Tính tổng :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{1892}+\frac{1}{1980}$$

Và tất nhiên ta cũng nghĩ đến bài toán ngược.
Bài 2 : Tìm x thuộc N biết :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{44}{45}$$

Hơn nữa ta có :

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}\ ;\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}\ ;\ \ldots\ ;\ \frac{1}{45^2}<\frac{1}{44.45}$$

ta có bài toán
Bài 3 : Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{45^2}<1$$

$$\text{Mà }0<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{45^2}$$

Do vậy, cho ta bài toán **"tưởng như khó"**
Bài 4 : Chứng tỏ rằng tổng :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{45^2}$$

không phải là số nguyên.
Chúng ta cũng nhận ra rằng nếu a_1 ; a_2 ; ... ; a_{44} là các số tự nhiên lớn hơn 1 và khác nhau thì

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_{44}^2}\le\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{45^2}$$

Giúp ta đến với bài toán **Hay** và **Khó** sau :
Bài 5 : Tìm các số tự nhiên khác nhau a_1 ; a_2 ; a_3 ; ... ; a_{43} ; a_{44} sao cho

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_{44}^2}=1$$

Ta còn có các bài toán "gần gũi" với bài toán 5 như sau :
Bài 6 : Cho 44 số tự nhiên a_1 ; a_2 ; ... ; a_{44} thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_{44}^2}=1$$

Chứng minh rằng, trong 44 số này, tồn tại hai số bằng nhau.
Bài 7 : Tìm các số tự nhiên a_1 ; a_2 ; a_3 ; ... ; a_{44} ; a_{45} thỏa mãn $a_1 < a_2\ a_3 < \ldots < a_{44} < a_{45}$ và

$$\frac{1}{a_1.a_2}+\frac{1}{a_2.a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{42}.a_{43}}+\frac{1}{a_{43}.a_{44}}+\frac{1}{a_{44}.a_{45}}=\frac{44}{45}$$

Các bạn còn phát hiện được điều gì thú vị nữa rồi chăng ?

Bài toán 2: Tính nhanh:

a) $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^8}$.

b) $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{2007}}+\frac{1}{3^{2008}}$.

c) $C=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n};\ n\in N^*$.

Bài toán 3: (Bài toán tổng quát của bài toán 2)

Tính nhanh: $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\cdots+\frac{1}{a^{n-1}}+\frac{1}{a^n};\ (\,n\in N^*;\ a\neq 0)$.

Bài toán 3: Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của các dãy saug:

a) $\frac{1}{1.2};\ \frac{1}{2.3};\ \frac{1}{3.4};\ \frac{1}{4.5};\ldots$ b) $\frac{1}{6};\ \frac{1}{66};\ \frac{1}{176};\ \frac{1}{336},\ldots$

Hướng dẫn: b) Ta thấy 6 = 1.6; 66 = 6.11; 176 = 11.16; 336 = 16.21,…

Do đó số hạng thứ n của dãy có dạng (5n – 4)(5n + 1).

Bài toán 4: Tính tổng:

a) $S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{37.38.39}$.

b) $S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{2006.2007.2008}$.

c) $S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1).(n+2)};\ (n\in N^*)$.

Bài toán 5: Tính giá trị của biểu thức:

a) $A=\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{97}+\frac{1}{99}}{\frac{1}{1.99}+\frac{1}{3.97}+\frac{1}{5.99}+\cdots+\frac{1}{97.3}+\frac{1}{99.1}}$. b) $B=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}}{\frac{99}{1}+\frac{98}{2}+\frac{97}{3}+\cdots+\frac{1}{99}}$.

Hướng dẫn:

a) Biến đổi số bị chia: $(1+\frac{1}{99})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{97})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{95})+\cdots+(\frac{1}{49}+\frac{1}{51})=\frac{100}{1.99}+\frac{100}{3.97}+\frac{100}{5.95}+\cdots\frac{100}{49.51}$

Biểu thức này gấp 50 lần số chia. Vậy A = 50.

$$\frac{100-1}{1}+\frac{100-2}{2}+\frac{100-3}{3}+\cdots+\frac{100-99}{99}=$$

b) Biến đổi số chia: $=\left(\frac{100}{1}+\frac{100}{2}+\frac{100}{3}+\cdots+\frac{100}{99}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\cdots+\frac{99}{99}\right)=$

$$=100+100\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}\right)-99=1+100\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)$$

Biểu thức này bằng 100 lần số bị chia. Vậy $B=\frac{1}{100}$.

Bài toán 6: Tìm tích của 98 số hạng đầu tiên của dãy:

$1\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{8};\ 1\frac{1}{15};\ 1\frac{1}{24};\ 1\frac{1}{35};\ldots$

Hướng dẫn: các số hạng đầu tiên của dãy được viết dưới dạng:
$\frac{4}{3};\ \frac{9}{8};\ \frac{16}{15};\ \frac{25}{24};\ \frac{36}{35};...$ Hay $\frac{2^2}{1.3};\ \frac{3^2}{2.4};\ \frac{4^2}{3.5};\ \frac{5^2}{4.6};\ \frac{6^2}{5.7};...$ Do đó số hạng thứ 98 có dạng $\frac{99^2}{98.100}$.

Ta cần tính: $A=\frac{2^2}{1.3}\cdot\frac{3^2}{2.4}\cdot\frac{4^2}{3.5}\cdot\frac{5^2}{4.6}\cdot\frac{6^2}{5.7}\cdots\frac{99^2}{98.100}=\frac{99}{50}$

Bài toán 7: Cho $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$. Hãy chứng minh rằng A không phải là số tự nhiên.
Hướng dẫn: Để qui đồng mẫu các phân số của A ta chọn mẫu chung là tích của 2^6 với các thừa số lẻ nhỏ hơn 100. Gọi k_1, k_2, …, k_{100} là các thừa số phụ tương ứng, tổng A có dạng:
$B=\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{2^6.3.5.7.9...99}$. Trong 100 phân số của tổng A, chỉ có duy nhất phân số 1/64 có mẫu chứa 2^6 nên trong các thừa số phụ k_1,..., k_{100} chỉ có k_{64} là số lẻ, còn các thừa số phụ khác đều chẵn.
Bài toán tổng quát của bài toán 7: Cho $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. Hãy chứng minh rằng A không phải là số tự nhiên.