Chuyên đề: PH□ƠNG PHÁP TAM GIÁC BẰNG NHAU

Môn: Hình học
Lớp: 7

I. Mục tiêu

Sau khi học xong chuyên đề học sinh có khả năng:

1.Biết vận dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh hai tam giác bằng nhau; Nắm được các bước chứng minh hai đoạn thẳng hay hai góc bằng nhau; Biết vẽ thêm đường phụ để tạo ra hai tam giác bằng nhau.

2. Hiểu các bước phân tích bài toán, tìm hướng chứng minh

3. Có kĩ năng vận dụng các kiến thức được trang bị để giải toán.

II. Các tài liệu hỗ trợ:

- Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 7
-Hình học nâng cao THCS
- Vẽ thêm yếu tố phụ để giải các bài toán hình học 7
- Bồi dưỡng toán 7
- Nâng cao và phát triển toán 7
- …

III. Nội dung

1. Kiến thức cần nhớ

Ta đã biết nếu hai tam giác bằng nhau thì suy ra được các cặp cạnh tương ứng bằng nhau, các cặp góc tương ứng bằng nhau. Đó là lợi ích của việc chứng minh hai tam giác bằng nhau.

*. Các trường hợp bằng nhau của tam giác

a. Trường hợp cạnh - cạnh - cạnh: Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh tương ứng của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

b. Trường hợp cạnh - góc - cạnh: Nếu hai cạnh và một góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

c. Trường hợp góc - cạnh - góc: Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

*. Muốn chứng minh hai đoạn thẳng(hay hai góc) bằng nhau ta thường làm theo các bước sau:

- Xét xem hai đoạn thẳng(hay hai góc) là hai cạnh (hay hai góc) thuộc hai tam giác nào.
- Chứng minh hai tam giác đó bằng nhau
- Suy ra hai cạnh (hay hai góc) tương ứng bằng nhau.

*. Để tạo ra được hai tam giác bằng nhau, có thể ta phải vẽ thêm đường phụ bằng nhiều cách:

- Nối hai cạnh có sẵn trên hình để tạo ra một cạnh chung của hai tam giác.

- Trên một tia cho trước, đặt một đoạn bằng một đoạn thẳng khác.
- Từ một điểm cho trước, vẽ một đường thẳng song song với một đoạn thẳng.
- Từ một điểm cho trước, vẽ một đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng.

Ngoài ra còn nhiều cách khác ta có thể tích luỹ được kinh nghiệm khi giải nhiều bài toán.

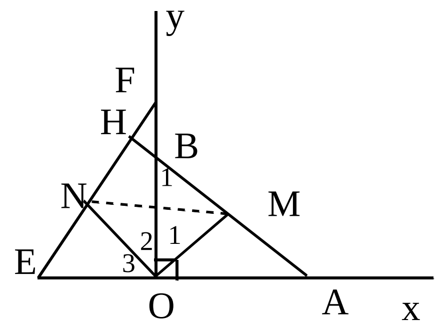
2. Các ví dụ:

***2.1. Ví dụ 1**(BTNC&MSCĐ/123)*

Cho góc vuông xOy, điểm A trên tia Ox, điểm B trên tia Oy. Lấy điểm E trên tia đối của tai Ox, điểm F trên tia Oy sao cho OE= OB, OF= OA.

a. Chứng minh AB = EF, AB $\perp$ EF.

b. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và EF. Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.



Giải:

GT	$\widehat{xOy} = 90^0$; A $\in$ Ox, B $\in$ Oy OE = OB, OF= OA M $\in$ AB: MA = MB N $\in$ EF: NE = NF
KL	a, AB = EF, AB $\perp$ EF b. $\triangle$OMN vuông cân

<u>Chứng minh</u>

a. Xét $\triangle$AOB và $\triangle$FOE có:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OF\ (GT) \\ \widehat{AOB} = \widehat{FOE} = 90^0 \\ OB = OE\ (GT) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOB \text{ và } \triangle FOE (C.G.C)$$

$\Rightarrow$ AB = EF(cạnh tương ứng)

$\widehat{A} = \widehat{F}$ (1) (góc tương ứng)

Xét $\triangle$FOE : $\widehat{O} = 90^0 \Rightarrow \widehat{E} + \widehat{F} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{E} + \widehat{A} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EAH} = 90^0 \Rightarrow$ EH $\perp$ HA hay AB $\perp$ EF.

b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BM = \frac{1}{2}AB(\text{ M là trung điểm của AB}) \\ EN = \frac{1}{2}EF(\text{ M là trung điểm của EF}) \\ \text{Mà } AB = EF \end{array}\right\} \Rightarrow BM = EN$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mặt khác: } \triangle FOE : \widehat{O} = 90^0 \Rightarrow \widehat{E} + \widehat{F} = 90^0 \\ \triangle OAB : \widehat{O} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B_1} = 90^0 \\ \text{Mà } \widehat{A} = \widehat{F} (\text{cmt}) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{B_1}$$

Xét $\triangle$BOM và $\triangle$EON có :

$$\left.\begin{array}{l} OB = OE\ (gt) \\ \widehat{B_1} = \widehat{E} (\text{cmt}) \\ BM = EN\ (\text{cmt}) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BOM = \triangle EON\ (c.g.c)$$

$\Rightarrow$ OM = ON (*)

Và $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

Mà $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^0$ nên $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MON} = 90^0$ (**)

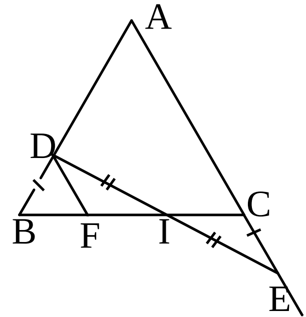
Từ (*) và(**)$\Rightarrow$ $\triangle$OMN vuông cân

***2.2. VD2**(BT26/VTYTP/62):*

Cho $\triangle$ABC cân đỉnh A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho BD = CE. Nối D với E. Gọi I là trung điểm của DE.

Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng.

Giải



GT	$\triangle$ABC: AB = AC D $\in$ AB, E $\in$ AC: BD=CE I $\in$ DE: ID = IE
KL	B, I, C thẳng hàng

* Phân tích: B, I, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \widehat{BIE}+\widehat{EIC}=180^0$

Mà $\widehat{BID}+\widehat{BIE}=180$

$\Rightarrow$Cần c/m $\widehat{BID}=\widehat{EIC}$

$\Rightarrow$ Cần tạo ra một điểm F trên cạnh BC: $\triangle$EIC = $\triangle$DIF

Chứng minh

Kẻ DF// AC(F $\in$BC)$\Rightarrow \widehat{DFB}=\widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị)

Mà $\triangle$ABC cân tai A $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{ACB}$ (t/c)

$\Rightarrow \widehat{DFB}=\widehat{ABC}$

$\Rightarrow\triangle$DFB cân tai D $\Rightarrow$ DB = DF

Xét $\triangle$DIF Và$\triangle$EIC có:

ID = IE (gt)

$\widehat{FDI}=\widehat{CEI}$ (SLT, DF// AC)

DF = EC (=BD)

$\Rightarrow$ $\triangle$DIF =$\triangle$EIC(c.g.c)

$\Rightarrow$ $\widehat{DIF}=\widehat{EIC}$ (hai góc tương ứng) (1)

Vì I $\in$DE nên $\widehat{DIF}+\widehat{FIE}=180^0$ (2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow \widehat{EIC}+\widehat{FIE}=180^0$ hay $\widehat{EIC}+\widehat{EIB}=180^0\Rightarrow$ B, I, C thẳng hàng.

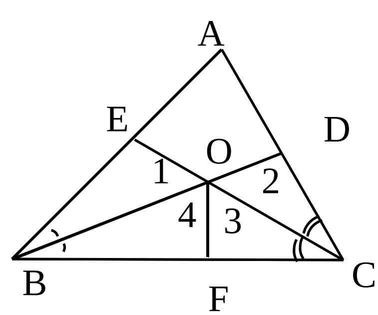
***2.3. VD 3**:(BTNC&MSCD/123)*

Cho $\triangle$ABC, $\widehat{A}=60^0$. Phân giác BD, CE cắt nhau tại O. Chứng minh rằng :

a. $\triangle$DOE cân

b. BE + CD= BC.

Giải



GT	$\triangle$ABC, $\widehat{A}=60^0$ BD: Phân giác $\widehat{B}$(D$\in$AC) CE: Phân giác $\widehat{C}$(E$\in$AB) BD$\cap$ CE = {O}
KL	a. $\triangle$DOE cân b. BE + CD= BC.

Chứng minh

Ta có: $\triangle ABC$: $\hat{B}+\hat{C}=180^0 - \hat{A}=180^0 - 60^0 = 120^0$ (Định lý tổng ba góc của một tam giác)

Mà $\hat{B}_1=\frac{\hat{B}}{2}$ (BDlà phân giác $\hat{B}$)

$\hat{C}_1=\frac{\hat{C}}{2}$ (CE là phân giác $\hat{C}$)

Nên $\hat{B}_1+\hat{C}_1=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{120^0}{2}=60^0$

$\triangle OBC$: $\widehat{BOC} = 180^0 - (\hat{B}_1+\hat{C}_1)= 180^0 - 60^0=120^0$((Định lý tổng ba góc của một tam giác)

$$\left.\begin{aligned}&\text{Mặt khác: } \widehat{BOC}+\hat{O}_1 = 180^0(\text{ kề bù})\\ &\widehat{BOC}+\hat{O}_2 = 180^0(\text{ kề bù})\end{aligned}\right\}\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2=60^0$$

Vẽ phân giác OF của $\widehat{BOC}$ ($F\in BC$) $\Rightarrow \hat{O}_3=\hat{O}_4=\frac{\widehat{BOC}}{2}=60^0$

Do đó : $\hat{O}_1=\hat{O}_2=\hat{O}_3=\hat{O}_4=60^0$

Xét $\triangle BOE$ và $\triangle BOF$ có:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{B}_2=\hat{B}_1 \text{(BDlà phân giác } \hat{B})\\ &\text{BO cạnh chung}\\ &\hat{O}_1=\hat{O}_4=60^0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \triangle BOE = \triangle BOF(g.c.g)$$

$\Rightarrow$OE = OF (1) (hai cạnh tương ứng)

Và BE = BF

c/m tương tự $\triangle COD = \triangle COF$(g.c.g)$\Rightarrow$OD =- OF (2) (hai cạnh tương ứng)

và CD = EF

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ OE = OD $\Rightarrow \triangle DOE$ cân

b. Ta có BE = BF

CD = CF (cmt)

$\Rightarrow$BE+CD=BF+FC=BC

Vậy : BE + DC= BC

* Nhận xét:

- VD trên cho ta thêm một cách vẽ đường phụ:Vẽ phân giác OF của $\widehat{BOC}$. Khi đó OF là một đoạn thẳng trung gian để so sánh OD với OE.

- Ta cũng có thể vẽ thêm đường phụ bằng cách khác: Trên BC lấy điểm F:BF= BE. Do đó cần c/m $\triangle BOE = \triangle BOF$(g.c.g) và $\triangle COD = \triangle COF$(g.c.g).

3. Bài tập

3.1.Bài tập 1: 62- BTNC&MSCĐ/117)

Tam giác ABC và tam giác A'B'C' có AB=A'B', AC= A'C'. Hai góc A và A'bù nhau. Vẽ trung tuyến AM rồi kéo dài một đoạn MD=MA.

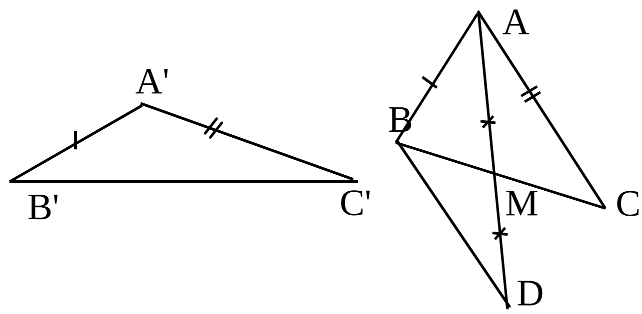
Chứng minh: a. $\widehat{ABD}=\hat{A}'$

b. AM = $\frac{1}{2}$B'C'

Giải

GT ΔABC, ΔA'B'C':
AB=A'B', AC= A'C'
$\hat{A} + \hat{A'} = 180^0$
M $\in$ BC: MB=MC
D $\in$ AM: MD=MA

KL a. $\widehat{ABD} = \hat{A'}$
b. AM = $\frac{1}{2}$B'C'



<u>Chứng minh</u>

Xét ΔAMC và ΔDMB có:

$$\left.\begin{array}{l} AM = MD \text{ (gt)} \\ \widehat{AMC} = \widehat{DMB} \text{ (đối đỉnh)} \\ MC = MB \text{(gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMC = \Delta DMB \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow$ AC = BD (hai cạnh tương ứng)

$\hat{A}_1 = \hat{D}$(hai góc tương ứng) $\Rightarrow$ AC//BD (vì có cặp góc SLT bằng nhau)

$\Rightarrow$ $\widehat{BAC} + \widehat{ABD} = 180^0$(hai góc trong cùng phía)

Mà $\widehat{BAC} + \hat{A'} = 180^0$(gt)

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \hat{A'}$

b. Xét ΔABD và ΔB'A'C' có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \text{(gt)} \\ \widehat{ABD} = \hat{A'} \text{(cmt)} \\ BD = A'C' (=AC) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \text{ và } \Delta B'A'C' \text{(c.g.c)}$$

$\Rightarrow$AD = B'C' (hai cạnh tương ứng)

Mà AM = $\frac{1}{2}$AD (gt)

$\Rightarrow$AM = $\frac{1}{2}$B'C'

* Nhận xét: Hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau và một cặp góc xen giữa chúng bù nhau thì trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác này bằng một nửa cạnh thứ ba của tam giác kia.

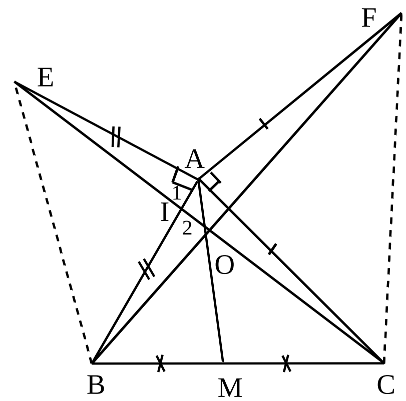
<u>***3.2. BT2:*** 63- BTNC&MSCĐ/117)</u>

Cho tam giác ABC. vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF.

Chứng minh: a. BF = CE và BF $\perp$ CE

b. Gọi M là trung điểm của BC. CMR: AM = $\frac{1}{2}$EF

Giải



GT
$\triangle$ABC
$\triangle$ABE: $\widehat{A} = 90^0$, AB = AE
$\triangle$ACF: $\widehat{A} = 90^0$, AC = AF
M $\in$ BC: MB=MC

KL a.BF = CE và BF $\perp$ CE
b.AM = $\frac{1}{2}$EF

Chứng minh

a. Ta có: $\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = 90^0 + \widehat{BAC}$

$\widehat{BAF} = \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 90^0 + \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{BAF}$

Xét $\triangle$ABF và $\triangle$AEC có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = AE(gt) \\ \widehat{BAF} = \widehat{EAC}\ (cmt) \\ AF = AC\ (cmt) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABF = \triangle AEC(c.g.c)$$

$\Rightarrow$BF = CE (hai cạnh tương ứng)

và $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$(hai góc tương ứng) (1)

Gọi O và I lần lượt là giao điểm của CE với BF và AB.

Xét $\triangle$AEI vuông tại A có $\widehat{E_1} + \widehat{I_1} = 90^0$(2)

Và $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$(đối đỉnh) (3)

Từ (1), (2) và (3)$\Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{I_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BOI} = 90^0 \Rightarrow$BF $\perp$ CE

b. Ta có: $\widehat{EAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} + \widehat{FAE} = 360^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{FAE} = 360^0 - (\widehat{EAB} + \widehat{CAF}) = 360^0 - (90^0 + 90^0) = 180^0$

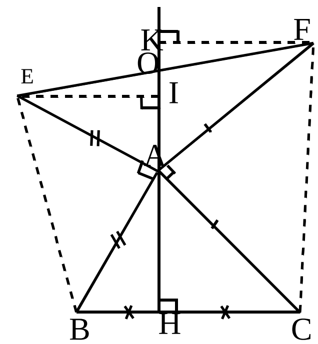
Ta thấy: $\triangle$ABC và $\triangle$EAF có hai cặp cạnh bằng nhau và một cặp góc xen giữa chúng bù nhau nên trung tuyến AM = $\frac{1}{2}$EF

3.3. BT3(HHNC/56):

Cho ΔABC .vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF. Vẽ AH vuông góc với BC. Đường thẳng AH giao EF tại O.

CMR: O là trung điểm của EF.

Giải



GT	ΔABC ΔABE: $\hat{A} = 90^0$, AB = AE ΔACF: $\hat{A} = 90^0$, AC = AF $AH \perp BC$ ($H \in BC$) $AH \cap EF = \{O\}$
KL	O là trung điểm của EF.

Chứng minh

Kẻ $EI \perp AH$, $FK \perp AH$ ($I, K \in AH$)

Xét ΔAEI và ΔABH có:

$\hat{I} = \hat{H} = 90^0$

AE = AB (gt) $\Rightarrow$

$\widehat{EAI} = \widehat{BAH}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn)

$\Rightarrow \Delta AEI = \Delta ABH$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow$ EI = AH (hai cạnh tương ứng)

Tương tự: $\Delta AFK = \Delta CAH$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow$ FK = AH (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔOEI và ΔOFK có:

$\hat{I} = \hat{K} = 90^0$

EI = FK (=AH) $\Rightarrow \Delta OEI = \Delta OFK$(g.c.g)

$\widehat{KFO} = \widehat{IEO}$ (SLT, EI//FK)

$\Rightarrow$ OE = OF (hai cạnh tương ứng)

Mà $O \in EF$(gt)

$\Rightarrow$ O là trung điểm của EF.

3.4. BT4(88/ BDT7/101)

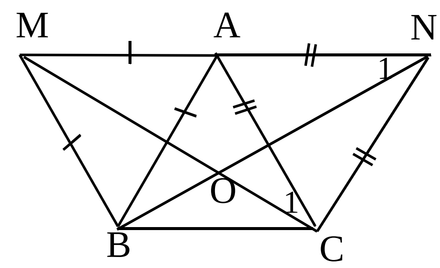
Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^0$. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác đều ABM và CAN.

a. CMR: Ba điểm A, M, N thẳng hàng

b. c/m BN = CM

c. Gọi O là giao điểm của BN và CM. Tính $\widehat{BOC}$.

Giải



GT $\triangle ABC$: $\widehat{A} = 60^0$

$\triangle ABM$: AB= BM=MA

$\triangle CAN$: AC=CN=NA

BN $\cap$ CM = {O}

Kl a. A,M,N thẳng hàng

b. BN=CM

c. $\widehat{BOC}$ =?

<u>Chứng minh</u>

a. $\triangle ABM$, $\triangle CAN$ đều $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAN} = 60^0$

Vậy $\widehat{MAN} = \widehat{BAM} + \widehat{BAC} + \widehat{CAN} = 60^0+60^0+60^0=180^0 \Rightarrow$ M,A,N thẳng hàng

b.Xét $\triangle ABN$ và $\triangle ACM$ có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = AM \text{ (gt)} \\ \widehat{BAN} = \widehat{CAM}\ (=120^0) \\ AN=AC \text{(gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABN = \triangle ACM \text{(c.g.c)}$$

$\Rightarrow$ BN = CM (hai cạnh tương ứng)

Và $\widehat{C_1} = \widehat{N_1}$ (hai góc tương ứng)

c. $\widehat{BOC}$ là góc ngoài của $\triangle OCN$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{OCN} + \widehat{ONC} = \widehat{C_1} + \widehat{ACN} + \widehat{ONC}$

Mà $\widehat{C_1} = \widehat{N_1}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{N_1} + \widehat{ACN} + \widehat{ONC} = \widehat{ACN} + \widehat{ANC} = 60^0+60^0=120^0$

<u>***3.5.BT5***(35/NC&PT/37)</u>

Chứng minh rằng: Nếu hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác này bằng hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Giải

GT $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$:

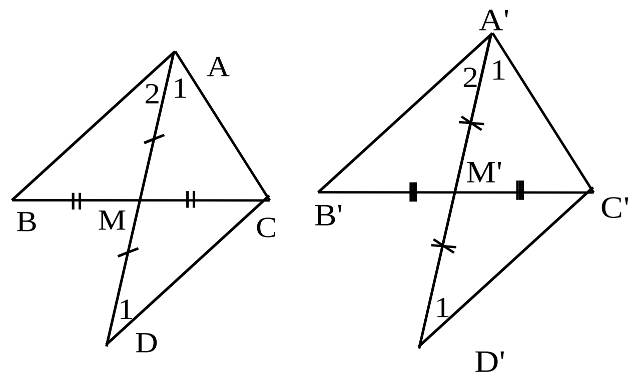
AB = A'B', AC= A'C'

M $\in$ BC: MB=MC

M' $\in$ B'C': M'B'=M'C'

AM=A'M'

KL $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$



Chứng minh

Lấy D $\in$ AM: MD=MA

Lấy D' $\in$ A'M': M'D'=M'A'

Xét ΔABM và ΔDMC có:

MB=MC(gt)

$\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (đối đỉnh)

AM = MD(cách lấy điểm D)

$\Rightarrow \Delta$ABM và ΔDMC(c.g.c)

$\Rightarrow$CD= AB(hai cạnh tương ứng)

Và $\hat{A}_2 = \hat{D}_1$ (1)(hai góc tương ứng)

C/m tương tự ; C'D'=A'B'; $\hat{A}'_2 = \hat{D}'_1$ (2)

Xét ΔACD và ΔA'C'D' có:

AC = A'C'(gt)

AD=A'D'(vì AM=A'M')

CD=C'D'(=AB)

$\Rightarrow \Delta$ACD = ΔA'C'D'(c.g.c)

$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ và $\hat{D}_1 = \hat{D}'_1$ (3)

Từ (1), (2),(3) $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}'_2$ mà $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

Vậy ΔABC=ΔA'B'C'(c.g.c)

* cách 2:

ΔAMC và ΔA'M'C' có:

AM=A'M'(gt)

$\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ (cmt)

AC= A'C'(gt)

$\Rightarrow \Delta$AMC = ΔA'M'C'(c.g.c)

$\Rightarrow$MC = M'C'(hai cạnh tương ứng)

Mà MC = $\frac{1}{2}$BC; M'C' = $\frac{1}{2}$B'C'(gt). Do đó: BC=B'C'.

Vậy ΔABC=ΔA'B'C'(c.c.c)

4. Chốt lại phần lý thuyết và lưu ý vận dụng chuyên đề: Khi cần phải chứng minh hai đoạn thẳng hay hai góc bằng nhau

5.Bài tập về nhà:

Cho tam giác ABC cân đáy BC. $\widehat{BAC}$ =20^0. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{BCE}$ =50^0. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD}$ =60^0. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC,nó cắt AB tại F. Gọi O là giao điểm của BD và CF.

a. C/m ΔAFC=ΔADB.

b. C/m ΔOFD và ΔOBC là các tam giác đều.

c. Tính số đo góc EOB.

d. C/m ΔEFD = ΔEOD.

d. Tính số đo góc BDE.