

**ĐỀ TỰ LUYỆN THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2014- 2015**

**Môn: TOÁN**

Thời gian làm bài: 180 phút

**Câu 1 (2,0 điểm).** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  (1).

a\*) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b\*) Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = x + m$  cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng  $\sqrt{3}$ , với I là giao điểm của hai tiệm cận.

**Câu 2 (1,0 điểm).**

a\*) Giải phương trình:  $\sin 2x - 2\cos^2 x = 3\sin x - \cos x$ .

b\*) Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $z + (2-i)\bar{z} = 5+i$ . Tính mô đun của số phức  $w = 1 + iz + z^2$ .

**Câu 3\* (0,5 điểm).** Giải phương trình:  $\log_2(4^{x+1} + 4) \cdot \log_2(4^x + 1) = 3$ .

**Câu 4 (1,0 điểm).** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y \end{cases}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

**Câu 5\*(1,0 điểm).** Tính tích phân  $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx$ .

**Câu 6 (1,0 điểm).** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết  $SD = 2a\sqrt{3}$  và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng  $30^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

**Câu 7 (1,0 điểm).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, Cho hình thang cân ABCD với hai đáy AD, BC. Biết B(2; 3) và  $AB = BC$ , đường thẳng AC có phương trình  $x - y - 1 = 0$ , điểm  $M(-2; -1)$  nằm trên đường thẳng AD. Viết phương trình đường thẳng CD.

**Câu 8\* (1,0 điểm).** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm  $A(2;5;1)$  và mặt phẳng (P):  $6x + 3y - 2z + 24 = 0$ . Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt cầu (S) có diện tích  $784\pi$  và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H, sao cho điểm A nằm trong mặt cầu.

**Câu 9\* (0,5 điểm)** Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 5 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 5 tấm thẻ được chọn ra có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4.

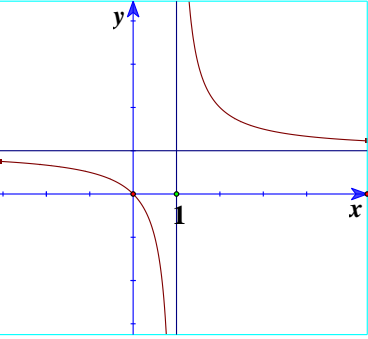
**Câu 10(1,0 điểm)** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}$$

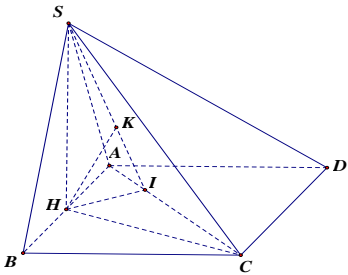
-----Hết-----

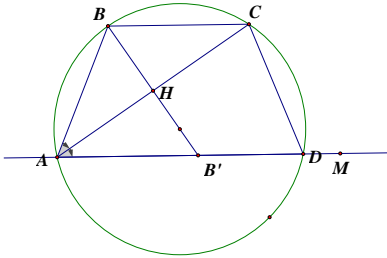
***Học sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.***

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2015**

Câu	Đáp án	Điểm												
<p><b>1</b> (2,0đ)</p>	<p>a) (1,0 điểm)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tập xác định <math>D = \mathbb{R} \setminus \{1\}</math>.</li> <li>• Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: <math>y' = -\frac{1}{(x-1)^2} &lt; 0, \forall x \in D</math>.</li> </ul> <p>Hàm số nghịch biến trên từng khoảng <math>(-\infty; 1)</math> và <math>(1; -\infty)</math>.</p> <p>- Giới hạn và tiệm cận: <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1. \Rightarrow</math>tiệm cận ngang: <math>y = 1</math>.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty. \Rightarrow</math>tiệm cận đứng: <math>x = 1</math>.</p> <p>- Bảng biến thiên:</p> <table border="1" data-bbox="337 646 1166 842"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>y'</math></td> <td></td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>1</td> <td><math>+\infty</math></td> <td>1</td> </tr> </table> <p>• Đồ thị:</p> 	$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$	$y'$		-	-	$y$	1	$+\infty$	1	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$											
$y'$		-	-											
$y$	1	$+\infty$	1											
	<p>b) (1,0 điểm)</p> <p>Gọi <math>d : y = x + m</math>.</p> <p>Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng <math>d</math> và đồ thị (C) là: <math>\frac{x}{x-1} = x + m</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x = (x-1)(x+m)</math> (Vì <math>x = 1</math> không phải là nghiệm của phương trình)</p> <p><math>\Leftrightarrow x^2 + (m-2)x - m = 0</math> (1)</p> <p>Ta có <math>\Delta = m^2 + 4 &gt; 0, \forall m</math> nên đường thẳng <math>d</math> luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi <math>m</math>.</p> <p>Khi đó, <math>A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)</math>, với <math>x_1, x_2</math> là hai nghiệm của phương trình (1).</p> <p>Ta có: <math>I(1; 1) \Rightarrow d(I, AB) = \frac{ m }{\sqrt{2}}</math>.</p> <p>và <math>AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} = \sqrt{2(m^2 + 4)}</math>.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>												

	<p>Ta có: <math>S_{IAB} = \frac{1}{2} AB.d(I, AB) = \frac{ m \sqrt{m^2+4}}{2}</math>. Theo giả thiết, ta có:</p> $S_{IAB} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{ m \sqrt{m^2+4}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}.$	0,25
2 (1,0đ)	<p>a) Phương trình đã cho tương đương <math>2\sin^2 x - 3\sin x - 2 + 2\sin x \cos x + \cos x = 0</math>  <math>\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x + \cos x - 2) = 0</math></p>	0,25
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\sin x + \cos x - 2 = 0</math>: Phương trình vô nghiệm</li> <li><math>2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})</math></li> </ul> <p>Vậy phương trình đã cho có nghiệm: <math>x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})</math>.</p>	0,25
	<p>a) Đặt <math>z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})</math>. Từ giả thiết ta có: <math>\begin{cases} 3a - b = 5 \\ -a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}</math>.</p> <p>Do đó <math>z = 1 - 2i</math>.</p>	0,25
	<p>Suy ra <math>w = 1 + iz + z^2 = 1 + i(1 - 2i) + (1 - 2i)^2 = -3i</math>. Vậy <math> w  = 3</math>.</p>	0,25
3 (0,5đ)	<p><math>\log_2(4^{x+1} + 4) \cdot \log_2(4^x + 1) = 3 \Leftrightarrow (2 + \log_2(4^x + 1)) \cdot \log_2(4^x + 1) = 3</math></p>	0,25
	<p>Đặt <math>t = \log_2(4^x + 1)</math>, phương trình trở thành: <math>(2 + t)t = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>t = 1 \Rightarrow \log_2(4^x + 1) = 1 \Leftrightarrow 4^x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 0</math>.</li> <li><math>t = -3 \Rightarrow \log_2(4^x + 1) = -3 \Leftrightarrow 4^x + 1 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4^x = -\frac{7}{8}</math>: Phương trình vô nghiệm.</li> </ul> <p>Vậy phương trình đã cho có nghiệm: <math>x = 0</math>.</p>	0,25
4 (1,0đ)	<p><math>\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 &amp; (1) \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y &amp; (2) \end{cases}</math> Điều kiện: <math>x \geq -2</math>.</p> <p>(1) <math>\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = (y-1)^3 + (y-1) + 2</math>.</p>	0,25
	<p>Xét hàm số <math>f(t) = t^3 + t + 2</math> trên <math>[-2; +\infty)</math>.</p> <p>Ta có: <math>f'(t) = 3t^2 + 1 &gt; 0, \forall t \in [-2; +\infty)</math>. Suy ra hàm số <math>f(t)</math> đồng biến trên <math>[-2; +\infty)</math>.</p> <p>Do đó: <math>x = y - 1</math>.</p>	0,25
	<p>Thay <math>y = x + 1</math> và phương trình (2) ta được: <math>x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1</math></p> $\Leftrightarrow x^3 - 8 = 2(\sqrt{x+2} - 2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)}$	0,25

	$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = \frac{2(x-2)}{(\sqrt{x+2}+2)} \Leftrightarrow (x-2) \left[ x^2+2x+4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2}+2)} \right] = 0$	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3</math></li> <li>• <math>x^2+2x+4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2}+2)} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x+4 = \frac{2}{(\sqrt{x+2}+2)}</math> (*)</li> </ul> <p>Ta có <math>VT = x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 \geq 3</math>; <math>VP = \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} \leq 1, \forall x \in [-2; +\infty)</math></p> <p>Do đó phương trình (*) vô nghiệm.</p> <p>Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất <math>(x; y) = (2; 3)</math>.</p>	0,25
5 (1,0đ)	<p>Ta có: <math>I = \int_1^e \left( x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx</math>.</p>	0,25
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tính <math>\int_1^e x \ln x dx</math>. Đặt <math>u = \ln x</math> và <math>dv = x dx</math>. Suy ra <math>du = \frac{1}{x} dx</math> và <math>v = \frac{x^2}{2}</math></li> </ul> <p>Do đó, <math>\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}</math></p>	0,25
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tính <math>\int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx</math>. Đặt <math>t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx</math>. Khi <math>x=1</math> thì <math>t=0</math>, khi <math>x=e</math> thì <math>t=1</math>.</li> </ul> <p>Ta có: <math>\int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}</math>.</p>	0,25
	<p>Vậy, <math>I = \frac{e^2+3}{4}</math>.</p>	0,25
6 (1,0đ)	 <p>Gọi H là trung điểm của AB. Suy ra <math>SH \perp (ABCD)</math> và <math>\angle SCH = 30^\circ</math>.</p> <p>Ta có: <math>\triangle SHC = \triangle SHD \Rightarrow SC = SD = 2a\sqrt{3}</math>.</p> <p>Xét tam giác SHC vuông tại H ta có:</p> $SH = SC \cdot \sin \angle SCH = SC \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}$ $HC = SC \cdot \cos \angle SCH = SC \cdot \cos 30^\circ = 3a$	0,25
	<p>Vì tam giác SAB đều mà <math>SH = a\sqrt{3}</math> nên <math>AB = 2a</math>. Suy ra</p> $BC = \sqrt{HC^2 - BH^2} = 2a\sqrt{2}$ . Do đó, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4a^2\sqrt{2}$ . <p>Vậy, <math>V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}</math>.</p>	0,25
	<p>Vì <math>BA = 2HA</math> nên <math>d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))</math></p> <p>Gọi I là hình chiếu của H lên AC và K là hình chiếu của H lên SI. Ta có:</p>	0,25

	<p><math>AC \perp HI</math> và <math>AC \perp SH</math> nên <math>AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK</math>. Mà, ta lại có: <math>HK \perp SI</math>.</p> <p>Do đó: <math>HK \perp (SAC)</math>.</p> <p>Vì hai tam giác SIA và SBC đồng dạng nên <math>\frac{HI}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow HI = \frac{AH \cdot BC}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}</math>.</p> <p>Suy ra, <math>HK = \frac{HS \cdot HI}{\sqrt{HS^2 + HI^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}</math>.</p> <p>Vậy, <math>d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = 2HK = \frac{2a\sqrt{66}}{11}</math></p>	0,25
<p>7 (1,0đ)</p>	 <p>Vì ABCD là hình thang cân nên nội tiếp trong một đường tròn. Mà <math>BC = CD</math> nên AC là đường phân giác của góc <math>BAD</math>.</p> <p>Gọi <math>B'</math> là điểm đối xứng của B qua AC. Khi đó <math>B' \in AD</math>.</p> <p>Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:</p> $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}. \text{ Suy ra } H(3; 2).$ <p>Vì <math>B'</math> đối xứng với B qua AC nên H là trung điểm của <math>BB'</math>. Do đó <math>B'(4; 1)</math>.</p> <p>Đường thẳng AD đi qua M và nhận <math>\overline{MB'}</math> làm vector chỉ phương nên có phương trình <math>x - 3y - 1 = 0</math>. Vì <math>A = AC \cap AD</math> nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:</p> $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Do đó, } A(1; 0).$ <p>Ta có ABCB' là hình bình hành nên <math>\overline{AB} = \overline{B'C}</math>. Do đó, <math>C(5; 4)</math>.</p> <p>Gọi d là đường trung trực của BC, suy ra <math>d: 3x + y - 14 = 0</math>.</p> <p>Gọi <math>I = d \cap AD</math>, suy ra I là trung điểm của AD. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:</p> $\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases}. \text{ Suy ra, } I\left(\frac{43}{10}; \frac{11}{10}\right). \text{ Do đó, } D\left(\frac{38}{5}; \frac{11}{5}\right).$ <p>Vậy, đường thẳng CD đi qua C và nhận <math>\overline{CD}</math> làm vector chỉ phương nên có phương trình <math>9x + 13y - 97 = 0</math>. <b>(Học sinh có thể giải theo cách khác)</b></p>	0,25
<p>8 (1,0đ)</p>	<p>Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Suy ra: <math>d: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}</math></p> <p>Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên <math>H = d \cap (P)</math>.</p> <p>Vì <math>H \in d</math> nên <math>H(2 + 6t; 5 + 3t; 1 - 2t)</math>.</p> <p>Mặt khác, <math>H \in (P)</math> nên ta có: <math>6(2 + 6t) + 3(5 + 3t) - 2(1 - 2t) + 24 = 0 \Leftrightarrow t = -1</math></p>	0,25

	Do đó, $H(-4; 2; 3)$ .	
	Gọi $I, R$ lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu. Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng $784\pi$ , suy ra $4\pi R^2 = 784\pi \Rightarrow R = 14$ . Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH \perp (P) \Rightarrow I \in d$ . Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2 + 6t; 5 + 3t; 1 - 2t)$ , với $t \neq -1$ .	0,25
	Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn: $\begin{cases} d(I, (P)) = 14 \\ AI < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ 6(2 + 6t) + 3(5 + 3t) - 2(1 - 2t) + 24 }{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2}} = 14 \\ \sqrt{(6t)^2 + (3t)^2 + (-2t)^2} < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \Leftrightarrow t = 1 \\ -2 < t < 2 \end{cases}$ Do đó, $I(8; 8; -1)$ . Vậy, mặt cầu (S): $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 + (z + 1)^2 = 196$	0,25
<b>9</b> (0,5 đ)	Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{20}^5 = 15504$ . Trong 20 tấm thẻ, có 10 tấm thẻ mang số lẻ, có 5 tấm thẻ mang số chẵn và chia hết cho 4, 5 tấm thẻ mang số chẵn và không chia hết cho 4.	0,25
	Gọi A là biến cố cần tính xác suất. Ta có: $n(A) = C_{10}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 = 3000$ . Vậy, xác suất cần tính là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3000}{15504} = \frac{125}{646}$ .	0,25
<b>10</b> (1,0đ)	Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có: $3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \leq 1$ .	0,25
	Suy ra: $1 + a^2(b + c) \geq abc + a^2(b + c) = a(ab + bc + ca) = 3a \Rightarrow \frac{1}{1 + a^2(b + c)} \leq \frac{1}{3a}$ (1). Tương tự ta có: $\frac{1}{1 + b^2(c + a)} \leq \frac{1}{3b}$ (2), $\frac{1}{1 + c^2(a + b)} \leq \frac{1}{3c}$ (3).	0,25
	Cộng (1), (2) và (3) theo vế với vế ta có: $\frac{1}{1 + a^2(b + c)} + \frac{1}{1 + b^2(c + a)} + \frac{1}{1 + c^2(a + b)} \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{ab + bc + ca}{3abc} = \frac{1}{abc} \square$	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $abc = 1, ab + bc + ca = 3 \Rightarrow a = b = c = 1, (a, b, c > 0)$ .	0,25