ĐỀ TỰ LUYỆN THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2014- 2015

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1*(2 điểm). Cho hàm số $y = f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1\ (C)$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Câu 2*(1 điểm).

a) Cho $\cos\alpha = \frac{4}{5},\ \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$. Tính giá trị biểu thức $A = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = iz - \overline{z}$.

Câu 3*(0.5 điểm). Giải phương trình $2e^x + 2e^{-x} - 5 = 0,\ x \in R$.

Câu 4*(1 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x dx$.

Câu 5*(0.5 điểm). Trong cuộc thi " Rung chuông vàng", đội Thủ Đức có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí chơi, ban tổ chức chia các bạn thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm.

Câu 6(1 điểm). Trong không gian cho hình chóp S.ABCD, tứ giác ABCD là hình thang cân, hai đáy là BC và AD. Biết $SA = a\sqrt{2}, AD = 2a, AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng ABCD trùng với trung điểm cạnh AD. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

Câu 7(1 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $AIB = 90°$. Chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$. Đường thẳng AC qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết đỉnh A có hoành độ dương.

Câu 8*(1 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(1;-1;2), B(3;0;-4)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu 9(1 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y - 1} = x - 1 \end{cases}\ ;\ (x \in R)$

Câu 10(1 điểm). Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a + bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b + ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c + ab}}\ .$$

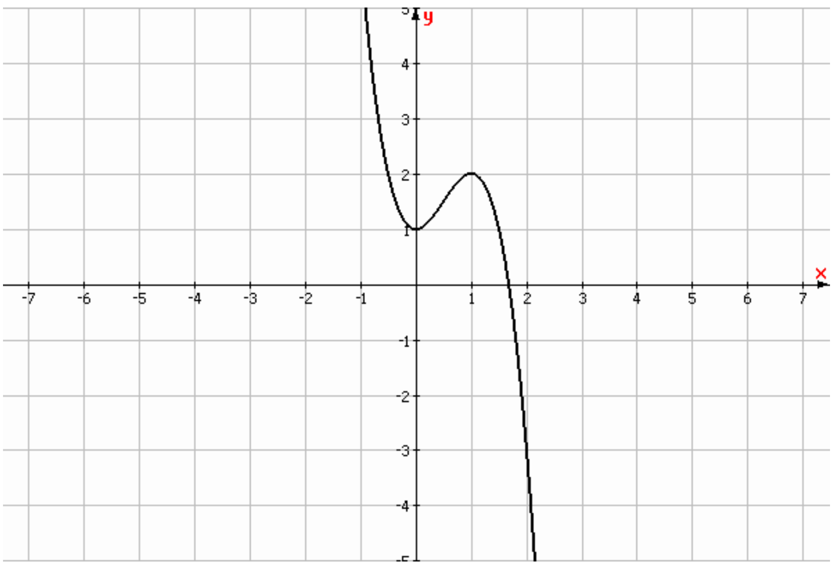
---- Hết -----

<table>
<tr><th colspan="2">CÂU</th><th>ĐÁP ÁN</th><th>ĐIỂM</th></tr>
<tr><td rowspan="7">1</td><td rowspan="7">a</td><td>Tập xác định $D = R$</td><td rowspan="3">0,25</td></tr>
<tr><td>$y' = -6x^2 + 6x$</td></tr>
<tr><td>$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & +\infty & \searrow & & \nearrow & 2 & \searrow & \\ & & & 1 & & & & -\infty \end{array}$$</td><td rowspan="2">0,25</td></tr>
<tr><td>Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0);(1;+\infty)$.

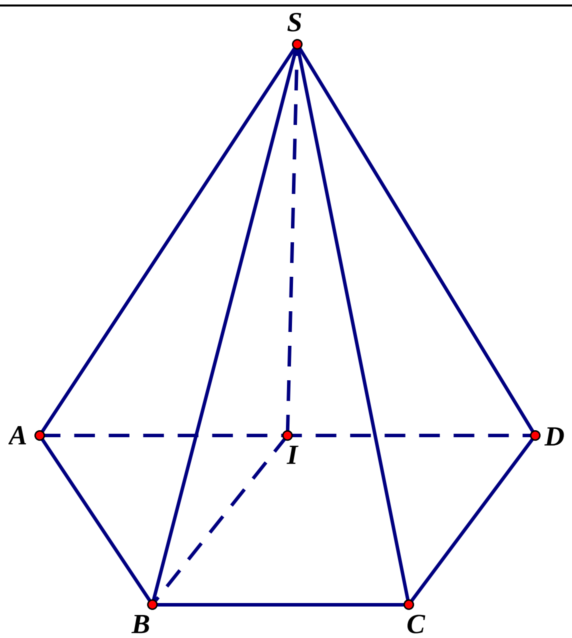
Hàm số đạt cực đại tại $x = 1, y_{CD} = 2.$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = 1.$</td></tr>
<tr><td>Bảng giá trị $\begin{array}{c|ccccc} x & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \hline y & 6 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & -3 \end{array}$

</td><td>0,25</td></tr>
</table>

	b	Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và (C). $f''(x)=-12x+6$	0,25
		$f''(x_0)=0\Leftrightarrow -12x_0+6=0$ $\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}\Rightarrow y_0=\frac{3}{2}$	0,25
		$f'(x_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$	0,25
		Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng $y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$ $=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$	0,25
2	a	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ $=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ $\Leftrightarrow \sin\alpha=\pm\frac{3}{5}$ Vì $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.	0,25
		$A=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ $=\frac{1}{2}\left[\sin 2\alpha+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ $=\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha-1)$ $=-\frac{49}{50}$	0,25
	b	$\bar{z}=3+2i$	0,25
		$w=i(3-2i)-(3+2i)$ $=-1+i$ Phần thực là -1 Phần ảo là 1.	0,25

3		$2e^x + 2e^{-x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0.$ Đặt $t = e^x, t > 0$. Phương trình trở thành $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$	0,25
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x = 2 \\ e^x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ln 2 \\ x = \ln\frac{1}{2} \end{array}\right.$	0,25
4	a	$I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x dx$ $= \int_1^e x\ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = I_1 + I_2$	0,25
		$I_1 = \int_1^e x\ln x dx$ Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ $dv = xdx$ chọn $v = \frac{x^2}{2}$ $I_1 = \frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e = \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}$	0,25
		$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx$ Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$ Đổi cận $\begin{array}{c\|cc} x & 1 & e \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$	0,25

		$I_2=\int_0^1 tdt=\left.\frac{t^2}{2}\right\|_0^1=\frac{1}{2}$	
		$I=I_1+I_2=\frac{3}{4}+\frac{e^2}{4}$	0,25
5		Có $n(\Omega)=C_{20}^5C_{15}^5C_{10}^5C_5^5$ cách chia 20 bạn vào 4 nhóm, mỗi nhóm 5 bạn.	0,25
		Gọi A là biến cố " 5 bạn nữ vào cùng một nhóm" Xét 5 bạn nữ thuộc nhóm A có $C_{15}^5C_{10}^5C_5^5$ cách chia các bạn nam vào các nhóm còn lại. Do vai trò các nhóm như nhau nên có $\|\Omega_A\|=4C_{15}^5C_{10}^5C_5^5$ Khi đó $P(\text{A})=\frac{4}{C_{20}^5}$	0,25
6		 Ta có $S_{ABCD}=3S_{ABI}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ Xét ΔSBI vuông tại I có: $SI^2=SB^2-BI^2=a^2\Rightarrow SI=a.$ $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$(dvtt)	0,25

		$\left.\begin{array}{l} AD \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow AD \parallel (SBC)$. $\Rightarrow d(AD,BC) = d(AD,(\mathrm{SBC})) = d(\mathrm{I},(\mathrm{SBC})) = \dfrac{3V_{SIBC}}{S_{SBC}}$	0,25
		$V_{ISBC} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ $S_{SBC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$	0,25
		Vậy $d(AD,SB) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$	0,25
7		$AIB = 90° \Rightarrow BCA = 45°$ hoặc $BCA = 135°$ Suy ra $CAD = 45° \Rightarrow \Delta ADC$ cân tại D. Ta có $DI \perp AC$ Khi đó phương trình đường thẳng AC có dạng: $x-2y+9=0$.	0.25
		$A(2a-9;a), \overrightarrow{AD} = (8-2a;-1-a)$ $AD^2 = 40 \Leftrightarrow a^2-6a+5=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=5 \end{array}\right.$ $\Rightarrow A(1;5)$(n)	0.25
		Phương trình BD : $x+3y+4=0$ Phương trình BI: $3x+4y+5=0$	0.25
		$B = BI \cap BD \Rightarrow B(2;-2)$.	0.25
8		$\overrightarrow{AB} = (2;1;-6)$ là vtcp của đường thẳng AB. Ptts AB: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 2-6t \end{cases} \quad (t \in R)$	0.25
		Gọi M là giao điểm của AB và (P). Khi đó $M(1+2t;-1+t;2-6t)$.	

		$M \in (P) \Rightarrow (1+2t)-2(-1+t)+2(2-6t)-5=0$ $\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{6}$ $\Rightarrow M\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{5}{6};1\right)$	0.25
		Vtpt $\vec{n}_{(Q)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}\right]=(-10;-10;-5)$.	0.25
		$(Q): 2x+2y+z-2=0.$	0.25
9		Đk: $\begin{cases} xy+x-y^2-y\ge 0 \\ 4y^2-x-2\ge 0 \\ y-1\ge 0 \end{cases}$ Ta có (1) $\Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$ Đặt $u=\sqrt{x-y}, v=\sqrt{y+1}$ $(u\ge 0, v\ge 0)$ Khi đó (1) trở thành : $u^2+3uv-4v^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-4v(vn) \end{array}\right.$	**0.25**
		Với $u=v$ ta có $x=2y+1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$ $\Leftrightarrow \sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0$	**0.25**
		$\dfrac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0 \Leftrightarrow (y-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0$	**0.25**
		$\Leftrightarrow y=2$ (vì $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}>0\forall y\ge 1$) Với $y=2$ thì $x=5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5;2)$	**0.25**
10		Vì a + b + c = 3 ta có $\dfrac{bc}{\sqrt{3a+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)$ Vì theo BĐT Cô-Si: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\ge\dfrac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ b = c	**0,25**
		Tương tự $\dfrac{ca}{\sqrt{3b+ca}}\le\dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{b+a}+\dfrac{1}{b+c}\right)$ và $\dfrac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{c+b}\right)$	**0,25**

		Suy ra P $\leq \dfrac{bc+ca}{2(a+b)}+\dfrac{ab+bc}{2(c+a)}+\dfrac{ab+ca}{2(b+c)}=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3}{2}$,	**0,25**
		Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1. Vậy max P = $\dfrac{3}{2}$ khi a = b = c = 1.	**0,25**