DỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 CẤP QUẬN

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4+2013x^2+2012x+2013$.

2. Rút gọn biểu thức sau: $A=\left(\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}-\dfrac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình sau:

$$(2x^2+x-2013)^2+4(x^2-5x-2012)^2=4(2x^2+x-2013)(x^2-5x-2012)$$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3+2x^2+3x+2=y^3$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Tìm đa thức f(x) biết rằng: f(x) chia cho $x+2$ dư 10, f(x) chia cho $x-2$ dư 24, f(x) chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư.

2. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2+c(a-b)(a+b-c)^2=b(a-c)(a+c-b)^2$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho AE = AF. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N.

1. Chứng minh rằng tứ giác AEMD là hình chữ nhật.

2. Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng: AC = 2EF.

3. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AN^2}$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho a,b,c là ba số dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

--------------Hết---------------

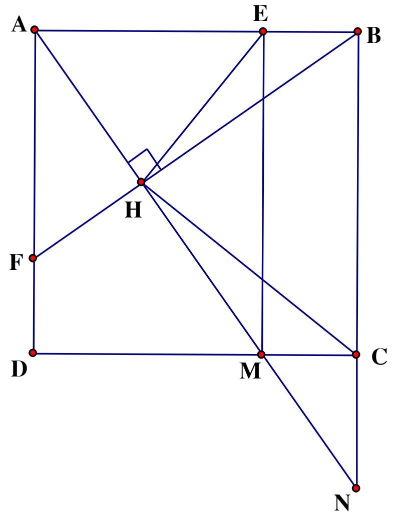
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
Câu 1		**(2.0 điểm)**
1 (1.0 điểm)	Ta có $x^4+2013x^2+2012x+2013$ $=\left(x^4-x\right)+2013x^2+2013x+2013$	0,25
	$=x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+2013\left(x^2+x+1\right)$	0.25
	$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2013\right)$	0.25
	Kết luận $x^4+2013x^2+2012x+2013=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2013\right)$	0.25
2 (1.0 điểm)	ĐK: $\begin{cases}x\neq 0\\x\neq 2\end{cases}$	0.25
	Ta có $A=\left(\dfrac{x^2-2x}{2x^2+8}-\dfrac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$	
	$=\left(\dfrac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\dfrac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)}\right)\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\right)$	0.25
	$=\left(\dfrac{x^2-2x}{2(x^2+4)}-\dfrac{2x^2}{(x^2+4)(2-x)}\right)\left(\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}\right)=\left(\dfrac{x(x-2)^2+4x^2}{2(x-2)(x^2+4)}\right)\left(\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}\right)$	0.25
	$=\dfrac{x^3-4x^2+4x+4x^2}{2(x^2+4)}.\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{x(x^2+4)(x+1)}{2x^2(x^2+4)}=\dfrac{x+1}{2x}$	0.25
	Vậy $A=\dfrac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases}x\neq 0\\x\neq 2\end{cases}$.	
Câu 2		**(2.0 điểm)**
1 (1.0 điểm)	Đặt: $\begin{cases}a=2x^2+x-2013\\b=x^2-5x-2012\end{cases}$	0.25
	Phương trình đã cho trở thành: $a^2+4b^2=4ab\Leftrightarrow(a-2b)^2=0\Leftrightarrow a-2b=0\Leftrightarrow a=2b$	0.25
	Khi đó, ta có: $2x^2+x-2013=2(x^2-5x-2012)\Leftrightarrow 2x^2+x-2013=2x^2-10x-4024$	0.25
	$\Leftrightarrow 11x=-2011\Leftrightarrow x=\dfrac{-2011}{11}$.	0.25
	Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-2011}{11}$.	
2 (1.0 điểm)	Ta có $y^3-x^3=2x^2+3x+2=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0\quad\Rightarrow x<y\qquad(1)$	0.25
	$(x+2)^3-y^3=4x^2+9x+6=\left(2x+\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}>0\quad\Rightarrow y<x+2\qquad(2)$	0.25
	Từ (1) và (2) ta có $x<y<x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y=x+1$	0.25

	Thay $y = x + 1$ vào pt ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1$; **từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là: (-1 ; 0)**	0.25
Câu 3		**(2,0 điểm)**
1 (1.0 điểm)	Giả sử f(x) chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư là $ax+b$. Khi đó: $f(x)=(x^2-4).(-5x)+ax+b$	0.25
	Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} f(2)=24 \\ f(-2)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=24 \\ -2a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{2} \\ b=17 \end{cases}$	0.25
	Do đó: $f(x)=(x^2-4).(-5x)+\frac{7}{2}x+17$	0.25
	Vậy đa thức f(x) cần tìm có dạng: $f(x)=-5x^3+\frac{47}{2}x+17.$	0.25
2 (1.0 điểm)	Ta có: $a(b-c)(b+c-a)^2+c(a-b)(a+b-c)^2-b(a-c)(a+c-b)^2=0$ (1) Đặt: $\begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$	0.25
	Khi đó, ta có: $VT_{(1)}=\frac{x+z}{2}\left(\frac{x+y}{2}-\frac{y+z}{2}\right).y^2+\frac{y+z}{2}\left(\frac{x+z}{2}-\frac{x+y}{2}\right).x^2-\frac{1}{4}(x+y)(x-y).z^2$	0.25
	$=\frac{x+z}{2}.\frac{x-z}{2}.y^2+\frac{y+z}{2}.\frac{z-y}{2}.x^2-\frac{1}{4}(x^2-y^2)z^2$	0.25
	$=\frac{1}{4}(x^2-z^2).y^2+\frac{1}{4}(z^2-y^2).x^2-\frac{1}{4}(x^2-y^2).z^2$	0.25
	$=\frac{1}{4}(x^2-y^2).z^2-\frac{1}{4}(x^2-y^2).z^2=0=VP_{(1)}$ (đpcm)	0.25
Câu 4		**(3,0 điểm)**

1 (1.0 điểm)		
	Ta có $DAM = ABF$ (cùng phụ BAH) AB = AD (gt) $BAF = ADM = 90^0$ (ABCD là hình vuông) $\Rightarrow \Delta ADM = \Delta BAF$ (g.c.g)	0.5
	=> DM=AF, mà AF = AE (gt) Nên. AE = DM Lại có AE // DM (vì AB // DC)	0.25
	Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành Mặt khác. $DAE = 90^0$ (gt)	
	Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật	0.25
2 (1.0 điểm)	Ta có $\Delta ABH \backsim \Delta FAH$ (g.g) $=> \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH}$ hay $\frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH}$ (AB=BC, AE=AF)	0.25
	Lại có $HAB = HBC$ (cùng phụ ABH) $\Rightarrow \Delta CBH \backsim \Delta EAH$ (c.g.c)	0.25
	$\Rightarrow \frac{S_{\Delta CBH}}{S_{\Delta EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2$, mà $\frac{S_{\Delta CBH}}{S_{\Delta EAH}} = 4$ (gt) $\Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4$ nên $BC^2 = (2AE)^2$ $\Rightarrow$ BC = 2AE $\Rightarrow$ E là trung điểm của AB, F là trung điểm của AD	0.25
	Do đó: BD = 2EF hay AC = 2EF (đpcm)	0.25
3 (1.0 điểm)	Do AD // CN (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có: $\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$	0.25
	Lại có: MC // AB (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có: $\Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN}$ hay $\frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$	0.25
	$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$ (Pytago)	0.25
	$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 => \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ (đpcm)	0.25

Câu 5 **1,0 điểm**		
Câu 5: **1.0 điểm**	Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với $\forall$a, b, c $\in$ R và x, y, z > 0 ta có $$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \qquad (*)$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ Thật vậy, với a, b $\in$ R và x, y > 0 ta có $$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y} \qquad (**)$$ $$\Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y)\geq xy(a+b)^2$$ $$\Leftrightarrow (bx-ay)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có $$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$	0.50
	Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$ Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có $$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$ (Vì $abc=1$)	0.25
	Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$	
	Mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{3}{2}$	0.25
	Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ (đpcm)	
	Điểm toàn bài	**(10,0 điểm)**

Lưu ý khi chấm bài:

- *Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.*
- *Với bài 4, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không chấm.*