

Bài 1(3 điểm): Tìm x biết:

- a) $x^2 - 4x + 4 = 25$
 b) $\frac{x-17}{1990} + \frac{x-21}{1986} + \frac{x+1}{1004} = 4$
 c) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

Bài 2 (1,5 điểm): Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$

Bài 3 (1,5 điểm): Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Bài 4 (4 điểm): Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: AN.BI.CM = BN.IC.AM.

c) Chứng minh rằng: $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

• **Bài 1(3 điểm):**

a) Tính đúng $x = 7; x = -3$ (1 điểm)

b) Tính đúng $x = 2007$ (1 điểm)

c) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x + 4 \cdot 8 = 0$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow 2^x(2^x - 4) - 8(2^x - 4) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow (2^x - 2^3)(2^x - 2^2) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2^3 = 0$ hoặc $2^x - 2^2 = 0$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow 2^x = 2^3$ hoặc $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 3; x = 2$ (0,25điểm)

• **Bài 2(1,5 điểm):**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{xy + yz + xz}{xyz} = 0 \Rightarrow xy + yz + xz = 0 \Rightarrow yz = -xy - xz \quad ($$

0,25điểm)

$$x^2 + 2yz = x^2 + yz - xy - xz = x(x-y) - z(x-y) = (x-y)(x-z) \quad ($$

0,25điểm)

$$\text{Tương tự: } y^2 + 2xz = (y-x)(y-z) ; z^2 + 2xy = (z-x)(z-y) \quad ($$

0,25điểm)

$$\text{Do đó: } A = \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{xz}{(y-x)(y-z)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)} \quad ($$

0,25điểm)

$$\text{Tính đúng } A = 1 \quad (0,5$$

điểm)

• **Bài 3(1,5 điểm):**

Gọi \overline{abcd} là số phải tìm $a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$
(0,25điểm)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \end{cases} \text{ với } k, m \in \mathbb{N}, 31 < k < m < 100 \quad (0,25điểm)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases} \quad (0,25điểm)$$

$$\text{Do đó: } m^2 - k^2 = 1353$$

$$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123 \cdot 11 = 41 \cdot 33 \quad (k+m < 200) \quad (0,25điểm)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+k = 123 \\ m-k = 11 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m+k = 41 \\ m-k = 33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 67 \\ k = 56 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m = 37 \\ k = 4 \end{cases} \quad k = 4 \quad (0,25điểm)$$

$$\text{Kết luận đúng } \overline{abcd} = 3136 \quad (0,25điểm)$$

• **Bài 4 (4 điểm):**

Vẽ hình đúng
(0,25điểm)

$$a) \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'}$$

(0,25điểm)

Tương tự: $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$; $\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}$

(0,25điểm)

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

(0,25điểm)

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

(0,5điểm)

$$\frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$$

$$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$$

(0,5điểm)
(0,5điểm)

c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx
(0,25điểm)

- Chứng minh được góc BAD vuông, $CD = AC$, $AD = 2CC'$

(0,25điểm)

- Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$

(0,25điểm)

- ΔBAD vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$$

(0,25điểm)

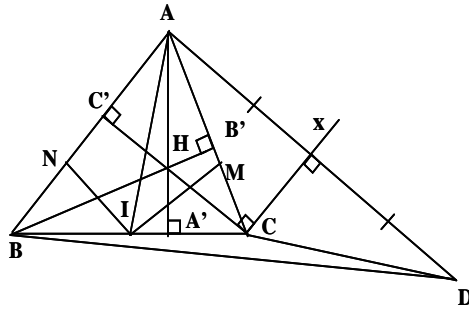
$$AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$$

$$4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$$

Tương tự: $4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$

$$4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

(0,25điểm)



-Chứng minh được : $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB+BC+AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$$

(0,25điểm)

(Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC \Leftrightarrow AB = AC = BC$
 $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều)