CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

- **Các phương pháp giải PT vô tỉ**

1) Phương pháp lũy thừa.
2) Phương pháp đặt ẩn phụ.
3) Phương pháp biến đổi thành tích.
4) Phương pháp nhân liên hợp
5) Phương pháp đánh giá.
6) Phương pháp hàm số.

- **Các phương pháp giải BPT vô tỉ**

1) Phương pháp lũy thừa.
2) Phương pháp đặt ẩn phụ
3) Phương pháp nhân liên hợp
4) Phương pháp đánh giá.

BÀI 1 : MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

I. Phương pháp lũy thừa.

- Nêu các dạng phương trình cơ bản.

Bài 1 Giải các phương trình

a) $\sqrt{x^2-3x+2}=x+1$ b) $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$

c) $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{3x-4}$ d) $(x-3)\sqrt{x^2-4}=x^2-9$

e) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=\sqrt{2x-8}$ f) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=\sqrt{5-2x}$

g) $(x-3)\sqrt{x^2-3x+2}=x^2-8x+15$ h) $(x+4)\sqrt{10-x^2}=x^2+2x-8$

i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$ j) $\dfrac{x^2}{\sqrt{4x-3}}-\sqrt{4x-3}=1-x$

Bài 2 Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}=\sqrt{2x^2+9x+7}$

b) $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}=\sqrt{2x^2+9x+7}$

c) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{x^2-5x+4}$

Bài 3 Giải phương trình

a) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$ b) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

c) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x+1}$ $x={}^{7}\!/_{6}$ (Phải thử , loại nghiệm)

Bài 4 Giải phương trình

a) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$. Bình phương 2 lần. nghiệm $x=0$

b) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+16}=\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}$ Bình phương 2 lần. nghiệm $x=0$

c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$

II. Phương pháp đặt ẩn phụ.

1) Dạng 1 : Phương trình có chứa $f(x)$ và $\sqrt{f(x)}$

Bài 1 Giải phương trình.

a) $(x+1)(x+4)=5\sqrt{x^2+5x+28}$ Nghiệm $4;-9$

b) $\sqrt{5x^2+10x+1}=7-2x-x^2$

c) $\sqrt{(4-x)(6+x)}=x^2-2x-12$

d) $x(x+5)=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

Bài 2 Tìm để phương trình có nghiệm

a) $-x^2+2x+4\sqrt{(3-x)(1+x)}=m-2$	$m\in[-1;11]$
b) $-2x^2+5x+4\sqrt{(3-x)(1+2x)}=m-2$	$m\in[-1;\dfrac{41+56\sqrt{2}}{8}]$

Bài 3 Giải phương trình :

a) $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}+4$	
b) $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}-7$	

2) Dạng 2 : Phương trình có chứa $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ và $\sqrt{AB}$

Bài 4 Giải phương trình

a) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-2$ Nghiệm $25-6\sqrt{17}$

b) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x$

c) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{x^2-16}$

d) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

Bài 5 *(B – 2011)* Giải phương trình : $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$

- Đặt $t=\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}$. Nghiệm $x=\frac{6}{5}$

Bài 6 Tìm m để phương trình có nghiệm

a) $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}=\sqrt{-x^2+7x+8}+m$ $\qquad m\in[\frac{6\sqrt{2}-9}{2};3]$

b) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=m$

c) $3(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-x})=m+x+2\sqrt{1+x-2x^2}$

3) Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Bài 7 Giải phương trình

a) $x^2+3x-x\sqrt{x^2+2}=1+2\sqrt{x^2+2}$	Đặt $t=\sqrt{x^2+2}$ nghiệm $t=3;1-x$
b) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$	
c) $x^2-1=2x.\sqrt{x^2-2x}$	Nghiệm $x=1\pm\sqrt{2}$
d) $3x^2-x+48=(3x-10)\sqrt{x^2+15}$	
e) $2(x-1).\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$	
f) $x^2+4x=(x+2).\sqrt{x^2-2x-15}+39$	
g) $(1-4x)\sqrt{4x^2+1}=8x^2+2x+1$	
h) $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$	
i) $x^3+3x+2=(x+2)\sqrt{x^3+2x+1}$	

4) Phương pháp chia để làm xuất hiện ẩn phụ.

Bài 8 Giải phương trình.

a) $(x-2)\sqrt{x^2-x+4}=2x$ bình phương, chia x^2	Đặt $t=x+\frac{4}{x}\Rightarrow t=0;5$ thử lại $\Rightarrow x=4$
b) $\sqrt{x^2+3x-2}+2\sqrt{x^2-x-2}=2\sqrt{x}$ chia cho $\sqrt{x}\Rightarrow$	Nghiệm $x=2$
c) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$ Chia 2 vế cho $\sqrt{x}$ và đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow x=4;\frac{1}{4}$	

Bài 9 Giải phương trình

a) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$

b) *(Thi thử ninh giang 2013)* $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

- Chuyển vế, bình phương và rút gọn ta được $2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$

$\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}$

- $\Leftrightarrow 2\frac{x^2-4x-5}{x+4}+3=5\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}}\Leftrightarrow x=8;\frac{5+\sqrt{61}}{2}$

c) $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}$

- Chuyển vế, bình phương ta được : $3(x^2-5x-14)+4(x+5)=7\sqrt{(x^2-5x-14)(x+5)}$

- Chia 2 vế cho $(x+5) \Rightarrow$ Nghiệm $3+2\sqrt{7};\ \dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}$

5) Đặt một hoặc nhiều ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp.

- *Chú ý :* Nêu cách giải phương trình đẳng cấp bậc hai, ba.

Bài 10

a) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ Đặt $a=\sqrt{x+1}; b=\sqrt{x^2-x+1}$ $PT \Leftrightarrow 2a^2+2b^2=5ab \Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

b) $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ Đặt $u=\sqrt{x-1}; v=\sqrt{x^2+x+1}$ $PT \Leftrightarrow 3u^2+2v^2=7uv \Rightarrow x=4\pm\sqrt{6}$

- Phương trình đã cho có dạng $a.u^2+b.v^2=c.uv$ trong đó căn thường $=uv$

c) $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

- *Cách 1* : Đặt $a=x^2; b=\sqrt{x^2-1}$. PT$\Leftrightarrow a+3b=\sqrt{a^2-b^2}$ nghiệm : $x=\pm1$
- *Cách 2* : Đặt $a=x^2$, thay vào PT ta được $36a^3-136a^2+200a-100=0 \Leftrightarrow a=1$

d) $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$ *(Thi thử NG 2013)*

- Chuyển vế, bình phương và rút gọn ta được $2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$

$\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}$ $\Leftrightarrow x=8; \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$

e) $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}$ Nghiệm : $3+2\sqrt{7};\ \dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}$

- Chuyển vế, bình phương ta được : $3(x^2-5x-14)+4(x+5)=7\sqrt{(x^2-5x-14)(x+5)}$

Bài 11. Giải phương trình : $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

- Điều kiện : $x\ge\dfrac{1}{2}$. Bình phương 2 vế ta có :

$$\sqrt{\left(x^2+2x\right)\left(2x-1\right)}=x^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2+2x\right)\left(2x-1\right)}=\left(x^2+2x\right)-\left(2x-1\right)$$

- Ta có thể đặt : $\begin{cases} u=x^2+2x \\ v=2x-1 \end{cases}$ khi đó ta có hệ : $uv=u^2-v^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}v \\ u=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}v \end{array}\right.$
- Do $u,v\ge0$. nên $u=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}v \Leftrightarrow x^2+2x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(2x-1\right) \Leftrightarrow 2x^2+2\left(1-\sqrt{5}\right)x+\left(\sqrt{5}+1\right)=0$.
- $\Delta'=\left(1-\sqrt{5}\right)^2-2\left(\sqrt{5}+1\right)=4\left(1-\sqrt{5}\right)<0$.Vậy phương trình đã cho vô nghiệm .

Bài 12. Giải phương trình : $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.

- Đặt $\begin{cases} \sqrt{4x^2+5x+1}=a \\ 2\sqrt{x^2-x+1}=b \end{cases} \left(a,b>0\right)$. ta có : $a-b=a^2-b^2 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a+b-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1 \end{array}\right.$.
- $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+5x+1=4x^2-4x+4 \\ \sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ \sqrt{4x^2+5x+1}=1-2\sqrt{x^2-x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$

Bài 13 Giải phương trình : $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$

- Đặt $y=\sqrt{x+2}$ ta được phương trình : $x^3-3x^2+2y^3-6x=0 \Leftrightarrow x^3+2y^3-3x(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -2y \end{array}\right. \Rightarrow$ *nghiêm* $x = 2;\ 2\text{-}2\sqrt{3}$

- *Chú ý có thể sửa lại đề bài thành :* $x^3 - (x+2)(3x - 2\sqrt{x+2}) = 0$
- *Bài tập tương tự :* $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+1)^3} - 3x = 0$
- *Bài tập tương tự :* $x^3 + (3x^2 - 4x - 4)\sqrt{x+1} = 0$

6) Dạng 6 : Đặt một hoặc nhiều ẩn phụ để đưa về hệ phương trình

Bài 14 Giải phương trình $3\sqrt{2x+1} - 6\sqrt{x+4} + \sqrt{(2x+1)(x+4)} + 7 = 0$

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2x+1} \\ v = \sqrt{x+4} \end{cases} \Leftrightarrow 2v^2 - u^2 = 7$ (1)
- Thay vào phương trình có : $3u - 6v + uv + 7 = 0$ (2)
- Thay (1) vào (2) và rút gọn được $(2v-u)(u+v-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 15 (Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình)

a) $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ ***(A – 2009)*** Nghiệm $x = -2$

b) $2\sqrt[3]{3x-2} - 3\sqrt{6-5x} + 16 = 0$ Nghiệm $x = -2$

c) $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$ Nghiệm $x = 1;\ 4$

d) $x.\sqrt[3]{35-x^3}.(x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30$ Nghiệm $x = 2\ ;\ 3$

e) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$ Nghiệm $x = 1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

f) $x^3 + 1 = 2.\sqrt[3]{2x-1}$ Nghiệm $x = 1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

g) $x^3 + 2 = 3.\sqrt[3]{3x-2}$

7) Dạng 7 : Đặt ẩn phụ đặc biệt.

Bài 16 (Các dạng đặt ẩn phụ đặc biệt)

a) $\sqrt{x+1} = x^2 + 4x + 5$ PT vô nghiệm.

b) $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}} = 7x^2 + 7x$ Đặt $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}} = y + \dfrac{1}{2}$

c) $\sqrt{x+2} = x^2 + 6x + 10$ Đặt $\sqrt{x+2} = y + 3$

d) $\sqrt{2x+1} = 4x^2 - 12x + 5$ Đặt $\sqrt{2x+1} = 2y - 3$

III. Phương pháp biến đổi thành tích.

Bài 1 Giải phương trình

a) $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

- Phương trình $\Leftrightarrow(\sqrt{x+3}-2x)(\sqrt{x+1}-1)=0\Leftrightarrow x=0;1$

b) $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$ HD $\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x})^2=0\Leftrightarrow x=1$

c) $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$ $HD:\Leftrightarrow(1+\sqrt{x+3})^2=9x^2\Leftrightarrow x=1;\ \dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}$

Bài 2 Giải phương trình

a) $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$

b) $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$

c) $x-2\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$

d) $\dfrac{x^2+7x+4}{x+2}=4\sqrt{x}$

IV. Phương pháp nhân liên hợp.

1) Cơ sở phương pháp : Nhiều phương trình vô tỉ có thể nhẩm được nghiệm x_0 hữu tỉ, khi đó phương trình luôn viết được thành $(x-x_0)P(x)=0$ và $P(x)=0$ có thể vô nghiệm hoặc giải được.
2) Cách nhẩm nghiệm : Ta thường thử các giá trị x_0 để trong căn là bình phương hoặc lập phương.

Bài 1

a) *(Khối B 2010)* Giải phương trình : $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

- PT $\Leftrightarrow(x-5)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right)=0$. Nghiệm duy nhất $x=5$

b) Giải phương trình : $2\sqrt[3]{3x-2}-3\sqrt{6-5x}+16=0$ Nghiệm duy nhất $x=-2$

- PT $\Leftrightarrow(x+2)\left[\dfrac{6}{(\sqrt[3]{3x-2})^2-2\sqrt[3]{3x-2}+4}+\dfrac{15}{\sqrt{6-5x}+4}\right]=0\Leftrightarrow x=-2$

c) *(ĐT năm 2013 lần 1)* Giải phương trình : $4\left(2\sqrt{10-2x}-\sqrt[3]{9x-37}\right)=4x^2-15x-33$

- ĐK: $x\le5$. Pt $\Leftrightarrow4\left(4+\sqrt[3]{9x-37}\right)+8\left(4-\sqrt{10-2x}\right)+4x^2-15x-81=0$ 0,25
- $\Leftrightarrow\dfrac{4(27+9x)}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\dfrac{8(6+2x)}{4+\sqrt{10-2x}}+(x+3)(4x-27)=0$ 0,25
- TH 1. $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ (TMPT) 0,25
- TH 2. $x\ne-3$
- pt $\Leftrightarrow\dfrac{36}{16-4\sqrt[3]{9x-37}+\left(\sqrt[3]{9x-37}\right)^2}+\dfrac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+4x-27=0$
- $\Leftrightarrow\dfrac{36}{12+\left(\sqrt[3]{9x-37}-2\right)^2}+\dfrac{16}{4+\sqrt{10-2x}}+4x-27=0$ 0,25
- Do $x\le5$ nên $VT\le\dfrac{36}{12}+\dfrac{16}{4}+4.5-27=0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=5$
- Vậy phương trình có 2 nghiệm là -3 và 5

Bài 2 Giải phương trình

a) $\sqrt{x+1}+4x^2=1+\sqrt{3x}$ Nghiệm $x=0;\frac{1}{2}$

b) $\sqrt{x+1}+9x^2=1+\sqrt{4x}$

c) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$. Nghiệm duy nhất $x=2$

- Nhận xét $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5\Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$ để chứng minh biểu thức còn lại vô nghiệm.

d) $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

e) $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-3x-3}-\sqrt{x^2-3x+4}$

- Nghiệm $x=2,\ P(x)=0$ vô nghiệm.

Bài 3 Giải phương trình :

a) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$.

- Ta có $VT>0\Rightarrow(x+4)>0\Rightarrow\sqrt{2x^2+x+9}\neq\sqrt{2x^2-x+1}$
- Nhân với biểu thức liên hợp ta được :
- $\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases}\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6\Leftrightarrow x=0;\frac{8}{7}$

b) $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$. Từ phương trình $\Rightarrow x>0$

- $(\sqrt{2x^2+x+1}-2x)+(\sqrt{x^2-x+1}-x)=0\Leftrightarrow(x-1)[\frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+2x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}]=0\Leftrightarrow x=1$.

Bài 4. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$

- Điều kiện : $x\geq\sqrt[3]{2}$.
- Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình , nên ta biến đổi phương trình
- $\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5\Leftrightarrow(x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right]=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}$
- Ta chứng minh : $1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\frac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất *x = 3*.

Bài 7 Giải phương trình

a) $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

b) $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$

c) $2\sqrt{(2-x)(5-x)}=x+\sqrt{(2-x)(10-x)}$

d) $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

e) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

f) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Bài 8 Giải phương trình :

a) $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$

b) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$

c) $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$

d) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-1}$

V. Phương pháp đánh giá.

Bài 1 Giải các PT sau :

a) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$ Nghiệm $x=3$

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}=x^2-12x+52$

c) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$ Nghiệm $x=1$

d) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$ Nghiệm $x=-1$

e) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{19-2x}=\dfrac{6}{-x^2+10x-24}$

Bài 2 Giải PT sau :

a) $2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12}=x^2+6x-1$

- VT : $=2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)}$ $(côsi)\le$ VP. Nghiệm $x=1;7$

b) $2\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2}=x^2+6x-1$ Nghiệm $x=1;\ 3$

c) $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-(x+\dfrac{1}{x})$ $PT\Leftrightarrow(\sqrt{2-x^2}+x)+(\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x})\le 4$

Bài 4. Giải phương trình: $\dfrac{x^2-6x+15}{x^2-6x+11}=\sqrt{x^2-6x+18}$ (1)

$(1)\Leftrightarrow 1+\dfrac{4}{(x-3)^2+2}=\sqrt{(x-3)^2+9}$

Mà : $1+\dfrac{4}{(x-3)^2+2}\le 1+\dfrac{4}{2}=3$ và $\sqrt{(x-3)^2+9}\ge 3$.

Do đó ta có: $(x-3)^2=0\Leftrightarrow x=3$.

Bài 5 Giải phương trình $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

- Bình phương 2 vế ta được : $x^2(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})^2=256$.
- Áp dụng bđt bunhia : $(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})^2=(\sqrt{13}.\sqrt{13-13x^2}+3\sqrt{3}.\sqrt{3+3x^2})^2\le 40(16-10x^2)$
- $\Rightarrow$ VT $\le x^2 40(16-10x^2)$. Áp dụng cosi $VT\le VP$. Nghiệm $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

VI. Phương pháp hàm số.

1) Cơ sở phương pháp :

- Để giải phương trình : $f(x)=m$ ta có thể chứng minh VT luôn đồng biến hoặc nghịch biến.
- Xét hàm số $f(x)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến mà có $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$.

2) Bài tập.

Bài 1 Giải các phương trình.

a) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}+\sqrt{x+16}=14$ $\Rightarrow x=9$.

b) $\sqrt{x-1}=-x^3-4x+5$. Chuyển vế, nghiệm duy nhất $x=1$.

c) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3}=4-x$. Chuyển vế, nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 2 *(CĐ – 2012)* Giải phương trình $4x^3+x-(x+1)\sqrt{2x+1}=0$

- Nhân 2 vế với 2 và biến đổi phương trình $\Leftrightarrow (2x)^3+2x=(2x+1)\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+1}$
- Xét hàm số $f(t)=t^3+t\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0\Rightarrow$Hàm số luôn đồng biến.
- Từ phương trình có $f(2x)=f(\sqrt{2x+1})\Rightarrow 2x=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Bài tập tương tự :

a) $2x(4x^2+1)=(x^2+3x+1)\sqrt{x^2+3x}\Rightarrow x=0;\frac{3}{4}$

b) $4x^3+x-(x+2)\sqrt{2x+3}=0$

Bài 3 Tìm m để phương trình có nghiệm : $m=\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-2x+4}$

- $y'=0\Leftrightarrow x=0$, vẽ bảng biến thiên $\Rightarrow m\in[4;+\infty)$

Bài 4 Tìm m để phương trình có nghiệm : $\sqrt{4-x^2}=mx-m+2$

- Cô lập tham số, $y'=0\Leftrightarrow x=0;\dfrac{8}{5}$

Bài 5 Tìm m để phương trình có nghiệm : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}-\sqrt{18-3x}=2m+1$

Bài 6 *(A – 2007)* Tìm m để phương trình có nghiệm : $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$

- Cô lập tham số $m=2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}-3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Bài 7 *(B – 2004)* Tìm m để phương trình có nghiệm :

$$m(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$$

- Đặt ẩn phụ : $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$

Bài 8 *(B – 2007)* Chứng minh rằng với mọi $m>0$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt :

$$x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$$

- Bình phương 2 vế đưa về phương trình bậc ba.

Bài 9 Tìm m để phương trình có nghiệm

Bài 10 Tìm m để phương trình có nghiệm

BÀI 2 : PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

I) Phương pháp lũy thừa. Có ba dạng phương trình cơ bản :

- Dạng 1 : $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$
- Dạng 2 : $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \end{array} \right.$
- Dạng 3 : $\sqrt{A} + \sqrt{B} < \sqrt{C}$

Bài 1 Giải bất phương trình :

a) $\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leq x - 3$	Kết quả : $x \in [5;6]$
b) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} \geq 8 - 2x$	Kết quả : $x \in [3;5]$
c) $\sqrt{x^2 - 2x - 8} < x - 3$	
d) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq x - 2$	

Bài 2 Giải bất phương trình :

a) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9$	
b) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$ $(A-2005)$	$\Rightarrow x \in [2;10)$
c) $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-9} \leq \sqrt{5x-27}$	
d) $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} \leq \sqrt{5x+1}$ $(CD-2009)$	
e) $\dfrac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$ $(A-2004)$	

Bài 3 Giải bất phương trình :

a) $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$

b) $\dfrac{\sqrt{8+2x-x^2}}{6-3x} \geq 1$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3x-5}} > \dfrac{1}{2x-1}$ $T = (-\infty; \dfrac{-5}{2}) \cup (1; \dfrac{3}{2}) \cup (2; +\infty)$

Bài 4 Giải bất phương trình : $\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-3x+1} \geq x - 1$

II) Phương pháp đặt ẩn phụ.

Bài 1 Giải bất phương trình :

a) $\sqrt{5x^2+10x+1} > 7 - 2x - x^2$	$T = (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$
b) $2x^2 + \sqrt{x^2-5x-6} > 10x + 15$	
c) $\sqrt{(x-3)(8-x)} + x^2 - 11x < 0$	

Bài 2 Giải bất phương trình :

a) $5\sqrt{x} + \dfrac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \dfrac{1}{2x} + 4$	
b) $\dfrac{x}{x+1} - 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} > 3$	

Bài 3 *(B – 2012)* Giải bất phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\ge 3\sqrt{x}$

- Chia 2 vế cho $\sqrt{x}$ và đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow t\ge\frac{5}{2}\Rightarrow x\in[0;\frac{1}{4}]\cup[4;+\infty)$

Bài 4 *(Thử GL – 2013)* Giải BPT : $\sqrt{x^2-x-2}+3\sqrt{x}\le\sqrt{5x^2-4x-6}$

- Điều kiện : $x\ge 2$.
- Bình phương 2 vế và rút gọn ta được : $3\sqrt{x(x-2)(x+1)}\le 2x(x-2)-2(x+1)$
- Chia 2 vế cho $(x+1)$ và đặt $t=\sqrt{\frac{x(x-2)}{x+1}}$. Nghiệm $x\in[3+\sqrt{13};+\infty)$

Bài 5 Giải bất phương trình

a) $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}\le 5\sqrt{x+1}$

- Chuyển vế, bình phương và rút gọn ta được $2x^2-5x+2\le 5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$

$\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)\le 5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)}$

$\Leftrightarrow 2\frac{x^2-4x-5}{x+4}+3\le 5\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}}$ $\Leftrightarrow x\in[\frac{5+\sqrt{61}}{2};8]$

b) $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}<7\sqrt{x+2}$

- Chuyển vế, bình phương ta được : $3(x^2-5x-14)+4(x+5)<7\sqrt{(x^2-5x-14)(x+5)}$
- Nghiệm $x\in$

Bài 6 (Thi thử ĐT – 2012) Giải BPT $x^3+(3x^2-4x-4)\sqrt{x+1}\le 0$

- Điều kiện : $x\ge -1$. Đặt $y=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ y^2=x+1\end{cases}$ - Bpt trở thành $x^3+(3x^2-4y^2)y\le 0$	0,25
- TH 1. $y=0\Leftrightarrow x=-1$. Thỏa mãn BPT - TH 2. $y>0\Leftrightarrow x>-1$. Chia hai vế cho y^3 ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2-4\le 0$. Đặt $t=\frac{x}{y}$ và giải BPT ta được $t\le 1$	0,25
- $t\le 1\Rightarrow\frac{x}{y}\le 1\Leftrightarrow x\le\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-1\le 0\end{cases}\end{array}\right.$	0,25
- $\left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\ \begin{cases}x\ge 0\\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Kết hợp $x>-1$ ta được - $-1<x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vậy tập nghiệm của BPT là S = $\left[-1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$	0,25

- **Cách 2** : Có thể biến đổi BPT về dạng tích

  $x^3+(3x^2-4x-4)\sqrt{x+1}\le 0\Leftrightarrow x^3+3x^2\sqrt{x+1}-4(x+1)\sqrt{x+1}\le 0$

- $\Leftrightarrow[x^3-(x+1)\sqrt{x+1}]+[3x^2\sqrt{x+1}-3(x+1)\sqrt{x+1}]\le 0$

  $\Leftrightarrow(x-\sqrt{x+1})(x+\sqrt{x+1})^2\le 0$

- *Bài tập tương tự* : $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x\le 0$

Phương pháp nhân liên hợp.

Bài 1 Giải bất phương trình :

a) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\geq x$	
b) $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$	Nghiệm $T=[\dfrac{-1}{2\sqrt{2}};0)\cup(0;\dfrac{1}{3})$

Bài 2 Giải bất phương trình :

a) Giải phương trình : $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8<0$. Nhẩm nghiệm $x=5$

- BPT $\Leftrightarrow (x-5)(\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1)<0$. Trong ngoặc $>0\Rightarrow$ Nghiệm $x\in[\dfrac{-1}{3};5)$

b) Giải phương trình : $2\sqrt[3]{3x-2}-3\sqrt{6-5x}+16\geq 0$ Nhẩm nghiệm $x=-2$

- BPT $\Leftrightarrow (x+2)[\dfrac{6}{(\sqrt[3]{3x-2})^2-2\sqrt[3]{3x-2}+4}+\dfrac{15}{\sqrt{6-5x}+4}]\geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}\in[-2;\dfrac{6}{5}]$

III) Phương pháp đánh giá.

Bài 1 Giải các PT sau :

a) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\geq x^2-6x+11$ Nghiệm $x=3$

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}\geq x^2-12x+52$

c) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}\leq 1+2x-x^2$ Nghiệm $x=1$

d) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}\leq 4-2x-x^2$ Nghiệm $x=-1$

e) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{19-2x}\geq \dfrac{6}{-x^2+10x-24}$

Bài 2 Giải PT sau :

a) $2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12}\geq x^2+6x-1$ VT : $=2\sqrt{(7x-4)(x^2-x+3)}$ $(côsi)\leq$ VP

b) $2\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2}\geq x^2+6x-1$

Bài 5 *(A – 2010)* Giải BPT : $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\geq 1$

- Ta có $1-\sqrt{2(x^2-x+1)}<0$ nên $BPT\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)}\leq 1-x+\sqrt{x}$ (1).
- Mặt khác ta lại có : $\sqrt{2(x^2-x+1)}=\sqrt{2(1-x)^2+2(\sqrt{x})^2}\geq 1-x+\sqrt{x}$ (2)
- Từ đó $\Rightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)}=1-x+\sqrt{x}$.
- Dấu bằng khi $1-x=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ $(t/m\ \ x\geq 0)$