

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG ĐẠI SỐ 7

-----***-----

CHUYÊN ĐỀ 1. CÁC PHÉP TOÁN TRONG Q.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ :

1. HS cần nắm vững những kiến thức sau trước khi nghiên cứu nội dung chuyên đề :

+Các phép toán : cộng ; trừ ; nhân ; chia ; lũy thừa trong Q;

+Quy tắc dấu ngoặc;

+Quy tắc chuyển vế;

+Tính chất các phép toán : giao hoán; kết hợp; phân phối của phép nhân đối với phép cộng ...

2. Từ các tính chất của phép toán ta chứng suy ra được các “**Công thức**” sau :

$$a) a^2 + 2a.b + b^2 = (a + b)^2 ;$$

$$b) a^2 - 2a.b + b^2 = (a - b)^2 ;$$

$$c) (a - b).(a + b) = a^2 - b^2 .$$

Thật vậy :

$$a) a^2 + 2ab + b^2 = (a.a + a.b) + (a.b + b.b)$$

$$= a.(a + b) + b.(a + b)$$

(T/C phân phối của phép nhân với

phép cộng)

$$= (a + b)(a + b)$$

(T/C phân phối của phép nhân với

phép cộng)

$$= (a + b)^2.$$

* Các Công thức b)c) HS tự chứng minh. Ta gọi các công thức trên là **các hằng đẳng thức đáng nhớ**.

II. DẠNG TOÁN :

Dạng 1. Các phép toán :

+ Khi cộng hay trừ một phân số bước đầu tiên phải đưa được các phân số về cùng mẫu số bằng cách : quy đồng (mà thực chất chính là nhân cả tử và mẫu của mỗi phân số với một giá trị thích hợp) hoặc rút gọn phân số , đây là bước quan trọng và đòi hỏi tư duy cao nhất. Qua một số bài tập sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu kĩ năng giải quyết vấn đề này bằng những cách làm “**đặc biệt**”.

Câu 1. Cho các số x,y,z,t thỏa mãn điều kiện : $xyzt = 1$

$$\text{Tính tổng : } P = \frac{1}{1+x+xy+xyz} + \frac{1}{1+y+yz+yzt} + \frac{1}{1+z+zt+ztx} + \frac{1}{1+t+tx+txy}$$

(HSG T.p HP –
1997)

+ Hướng dẫn giải :

- Ta có :
$$P = \frac{1}{1+x+xy+xyz} + \frac{1}{1+y+yz+yzt} + \frac{1}{1+z+zt+ztx} + \frac{1}{1+t+tx+txy}$$

$$= \frac{1}{1+x+xy+xyz} + \frac{x}{x+xy+xyz+1} + \frac{xy}{xy+xyz+1+x} + \frac{xyz}{xyz+1+x+xy}$$
 (nhân vào cả tử và mẫu mỗi phân số lần lượt với 1;x;xy;xyz và nhớ $xyzt = 1$)

$$= \frac{1+x+xy+xyz}{1+x+xy+xyz} = 1.$$

* Có thể làm theo cách khác như sau :

- Vì $xyzt = 1$ nên ta có thể đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{d}; t = \frac{d}{a}$ với a,b,c,d là các số thực

khác 0 . Khi đó ta có :

Biểu thức P được biến đổi thành :

$$\frac{1}{1+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{d}} + \frac{1}{1+\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}} + \frac{1}{1+\frac{c}{d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}+\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}\cdot\frac{a}{b}} + \frac{1}{1+\frac{d}{a}+\frac{d}{a}\cdot\frac{a}{b}+\frac{d}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}} + \frac{1}{1+\frac{b}{c}+\frac{b}{d}+\frac{b}{a}} + \frac{1}{1+\frac{c}{d}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}} + \frac{1}{1+\frac{d}{a}+\frac{d}{b}+\frac{d}{c}}$$

$$= \frac{bcd}{bcd+acd+abd+abc} + \frac{acd}{acd+abd+abc+bcd} + \frac{abd}{abd+abc+bcd+acd} + \frac{abc}{abc+bcd+acd+abd}$$

$$= \frac{bcd+acd+abd+abc}{bcd+acd+abd+abc}$$

$$= 1.$$

Vậy $P = 1$.

* **Chú ý** : đối với bài toán mà giả thiết cho các biến số có tích bằng 1 , ta có thể biến đổi bằng cách làm như trên (đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{d}; t = \frac{d}{a}$).

+ Khi nhân ; chia các phân số ta luôn phải chú ý **rút gọn** “tử - mẫu “ ($\frac{A.B}{A.C} = \frac{B}{C}$) .

Kĩ năng tưởng đơn giản này sẽ giúp ích rất lớn trong việc giải quyết nhiều bài toán khó. Thật vậy :

Câu 2. Tính : $A = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+1986}\right)$ (BD HSG toán 8-T.77)

+ Hướng dẫn giải :

- Ta có : (nhớ rằng $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$)

$$\begin{aligned}
 A &= \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+1986}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{\frac{2(2+1)}{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\frac{3(3+1)}{2}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{1986(1986+1)}{2}}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{1986.1987}\right) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{1987.1986-2}{1987.1986} \\
 &= \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{27}{20} \dots \frac{1987.1986-2}{1987.1986}; (1)
 \end{aligned}$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned}
 1986.1987 - 2 &= 1986(1988 - 1) + 1986 - 1988 \\
 &= 1986.1988 - 1988 \\
 &= 1988.(1986 - 1) \\
 &= 1988.1985 ;(2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4.1}{2.3} \cdot \frac{5.2}{3.4} \cdot \frac{6.3}{4.5} \dots \frac{1988.1985}{1986.1987} \\
 &= \frac{(4.5.6\dots 1988)}{(2.3.4\dots 1986)} \cdot \frac{(1.2.3\dots 1985)}{(3.4.5\dots 1987)} \\
 &= \frac{1987.1988}{2.3} \cdot \frac{1.2}{1986.1987} \\
 &= \frac{1988}{1986.3} = \frac{994}{2979} .
 \end{aligned}$$

* **Lưu ý** : Bài toán tổng quát hơn là :

$$A = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+n}\right) \text{ với } n \text{ là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng}$$

3.

+ Với những bài toán có chứa lũy thừa , cần chú ý một số công thức cơ bản sau :

0) $a^m = a.a.a\dots a$ (m thừa số); $a^0 = 1$; $a^1 = a$.

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ (hay : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$)

3) $(a^m)^n = a^{m.n}$

4) $(a.b)^n = a^n . b^n$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(Với các điều kiện tương ứng có nghĩa)

Câu 3. Rút gọn : $\frac{2^{19} \cdot 27 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$ (HSG quốc gia – 1971)

+ Hướng dẫn giải :

$$\text{- Ta có : } \frac{2^{19} \cdot 27 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^3 + 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^9}{2^{19} \cdot 3^9 + 3^{10} \cdot 2^{20}} = \frac{2^{18} \cdot 3^3 (2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 3^6)}{2^{18} \cdot 3^9 (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2)} = \frac{2 + 5 \cdot 3^6}{3^6 (2 + 3 \cdot 4)} = \frac{734}{10206} = \frac{367}{5103}$$

Câu 4. Rút gọn : $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{50}$ (NC&PT toán 7/T11)

+ Hướng dẫn giải :

$$\text{- Ta có : } 5 \cdot A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{51}$$

$$\text{Do đó : } 5 \cdot A - A = 5^{51} - 1 \text{ . Vậy } A = \frac{5^{51} - 1}{4} \text{ .}$$

* **NX** : Với biểu thức A như trên người ta còn thường ra bài toán : Chứng minh rằng A là số chẵn hay chứng minh A chia hết cho 6 hoặc chứng minh A không là số nguyên. Các em hãy thử tìm lời ?

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức hữu tỉ :

Câu 5. Cho ba số a , b , c đôi một khác nhau và thoả mãn hệ thức :

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 \text{ .}$$

Chứng minh rằng : $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$ (HSG toán 9 – 1999

– A)

+ Hướng dẫn giải :

$$\text{- Từ giả thiết suy ra : } \frac{a}{b-c} = \frac{b}{a-c} - \frac{c}{a-b} = \frac{ab - b^2 - ac + c^2}{(a-c)(a-b)} \text{ , nhân hai vế với } \frac{1}{b-c} \text{ ta}$$

được :

$$\frac{a}{(b-c)^2} = \frac{ab - b^2 - ac + c^2}{(a-c)(a-b)(b-c)}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{1}{(c-a)^2} = \frac{cb - c^2 - ab + a^2}{(a-c)(b-c)(a-b)}$$

$$\frac{1}{(a-b)^2} = \frac{ca - a^2 - cb + b^2}{(a-c)(b-c)(a-b)}$$

Cộng theo cột hai vế của ba đẳng thức trên ta có ĐPCM.

Câu 6. Chứng minh rằng nếu a,b,c khác nhau thì :

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

(Các bài toán chọn

lọc ...)

+ Hướng dẫn giải :

- Ta có :

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a-c)+(b-a)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c};$$

Tương tự : $\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b}; \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a}$

Cộng theo từng vế các kết quả vừa tìm được , suy ra ĐPCM.

Dạng 3. Toán tìm x :

Câu 7. Tìm số hữu tỉ x , biết rằng : $\frac{x+4}{2000} + \frac{x+3}{2001} = \frac{x+2}{2002} + \frac{x+1}{2003}$ (NC&PT toán 7

-tập 1)

+ Hướng dẫn giải :

- Ta cộng vào hai vế của đẳng thức với cùng một giá trị là 2 , được :

$$\frac{x+4}{2000} + \frac{x+3}{2001} = \frac{x+2}{2002} + \frac{x+1}{2003}$$

$$\frac{x+4}{2000} + 1 + \frac{x+3}{2001} + 1 = \frac{x+2}{2002} + 1 + \frac{x+1}{2003} + 1$$

$$\frac{x+2004}{2000} + \frac{x+2004}{2001} - \frac{x+2004}{2002} - \frac{x+2004}{2003} = 0$$

$$(x+2004) \left(\frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

Vì $\frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} \neq 0$ (hiển nhiên) nên $x + 2004 = 0$ hay $x = -2004$.

* **Nhận xét** : Với những hệ thức chứa các phân số có quy luật như trên ($4 + 2000 = 3 + 2001 = 2 + 2002 = 1 + 2003 = 2004$) thì kĩ năng biến đổi trên sẽ là một công cụ hữu hiệu để giải quyết bài toán.

Câu 8. Tìm x , biết : $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a+b+c$ với $a \neq -b; b \neq -c; c \neq -a$

+ Hướng dẫn giải : Đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\left(\frac{x-ab}{a+b} - a \right) + \left(\frac{x-ac}{a+c} - b \right) + \left(\frac{x-bc}{b+c} - c \right) = 0$$

Quy đồng mẫu số trong từng dấu ngoặc rồi đặt thừa số chung ta được :

$$(x-ab-ac-bc) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = 0$$

Từ đó nếu $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \neq 0$ thì $x = ab + bc + ca$;

Nếu $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0$ thì có vô số giá trị của x thỏa mãn bài toán.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ :

* Các bài

:1;2;3;5;9;10;11;14;16;20;22;23;24;25;26;27;29;30;31;33;34;38;39;40;41;42;
44;45;47 - NC&PT toán 7.

1) Tính : $\frac{-8}{5} + \frac{207207}{201201}$

2) Rút gọn phân số : $\frac{1999}{9995}$ (TQ : $\frac{199...99}{99...995}$) (BD HSG toán 8- trang 73)

3) Tính : $M = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2002}}{\frac{2001}{1} + \frac{2000}{2} + \frac{1999}{3} + \dots + \frac{1}{2001}}$ (HSG toán 6 T.p HP- 2002 – A)

4) Rút gọn : $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2009.2010}$

5) Rút gọn : $B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{1998.1999.2000}$ (HSG toán 6 T.p HP- 1999 – A)

6) Rút gọn : $N = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \dots + \frac{1}{2006.2008}$

7) Biết $xyz = 1$. Hãy tính tổng :

$A = \frac{5}{x+xy+1} + \frac{5}{y+yz+1} + \frac{5}{z+zx+1}$;(KQ = 5) (HSG toán 8 – 2001 – A)

8*) Cho ba số x, y, z thỏa mãn $xyz = 1992$. Chứng minh rằng :

$\frac{1992x}{xy+1992x+1992} + \frac{y}{yz+y+1992} + \frac{z}{xz+z+1} = 1$ (BD HSG toán 8 – trang 77)

9) Tính : a) $\left[6\left(\frac{-1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{3}\right) + 1 \right] : \left(\frac{-1}{3} - 1\right)$

b) $(6^3 + 3.6^2 + 3^3) : 13$

c) $\frac{9}{10} - \frac{1}{90} - \frac{1}{72} - \frac{1}{56} - \frac{1}{42} - \frac{1}{30} - \frac{1}{20} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$ (HSG quận Ba Đình HN –

2005)

10) Tìm x , biết : $\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} + 4 = 0$ (HSG q. Hoàn Kiếm HN – 2004)

11) Tìm x , biết :

a) $\frac{5}{6}x - \frac{3}{8}x - 10 = 12$

b) $\left(|x| - \frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^5 = \left(-\frac{1}{8}\right)^7$

(HSG Quận 9 - T.p HCM –

c) $x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$

2003)

12) Tính :

a) $A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 1999 - 2000 + 2001 + 2002 - 2003$

b) $B = \left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{9} - 1\right)\left(\frac{1}{16} - 1\right)\left(\frac{1}{25} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{121} - 1\right)$

(HSG Quận 9 - T.p HCM - 2003)

13) a) Tính : $\frac{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}{\frac{2003}{5} + \frac{2004}{5} - \frac{2005}{5}} - \frac{\frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004}}{\frac{2002}{3} + \frac{2003}{3} - \frac{2004}{3}}$

b) Biết : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025$. Tính : $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$.

c) Cho $A = \frac{x^3 - 3x^2 + 0,25xy^2 - 4}{x^2 + y}$. Tìm giá trị của A , biết $x = \frac{1}{2}$ và y là số nguyên âm lớn nhất.

(HSG - quận Tân Phú - T.p HCM - 2004)

14) Tìm x , biết : $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$. (HSG - quận Tân Phú - T.p HCM - 2004)

15) Thực hiện phép tính :

$$\frac{1\frac{111}{31} \cdot 4\frac{3}{7} - \left(1,5 - 6\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{19}\right)}{4\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\left(12 - 5\frac{1}{3}\right)} \left(-1; \frac{14}{93}\right)$$

(HSG - Hà Tây -

2003)

16) Thực hiện phép tính : $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-b)(c-a)}$

(HSG quốc gia - 1963)

17) Gọi n là số tự nhiên , tính tích sau đây theo n :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

(HSG quốc gia -

1978)

18) Cho a,b,c là các số thực có tích bằng 1. Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1;$

b) $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) = \left(a + 1 - \frac{1}{b}\right)\left(b + 1 - \frac{1}{c}\right)\left(c + 1 - \frac{1}{a}\right)$ (Toán tuổi thơ 2- số

51)

19) Tìm tất cả các số thực dương a,b,c thỏa mãn đẳng thức :

$$\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} = \frac{3}{2} .$$

(Toán tuổi thơ 2- số

51)

20) Cho $abc \neq 0$ và $a + b + c \neq 0$. Tìm x , biết :

$$\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{4x}{a+b+c} = 1$$

21) Cho x, y, z là các số khác không và $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Chứng minh rằng :

Hoặc $x = y = z$ hoặc $x^2 y^2 z^2 = 1$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI :

$$1) \frac{-8}{5} + \frac{207207}{201201} = \frac{-8}{5} + \frac{207}{201} = \frac{-8}{5} + \frac{69}{67} = \dots$$

$$2) \frac{1999}{9995} = \frac{2 \cdot 10^3 - 1}{10^4 - 5} = \frac{2 \cdot \left(10^3 - \frac{1}{2}\right)}{10 \cdot \left(10^3 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$3) M = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2002}}{\frac{2001}{1} + \frac{2000}{2} + \frac{1999}{3} + \dots + \frac{1}{2001}}$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2002} ;$$

$$B = \frac{2001}{1} + \frac{2000}{2} + \frac{1999}{3} + \dots + \frac{1}{2001}, \text{ ta có :}$$

$$B = \left(\frac{2000}{2} + 1\right) + \left(\frac{1999}{3} + 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{2001} + 1\right) + \frac{2002}{2002}$$

$$= \frac{2002}{2} + \frac{2002}{3} + \dots + \frac{2002}{2001} + \frac{2002}{2002}$$

$$= 2002 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2002} \right)$$

$$\text{Vậy } M = \frac{A}{B} = \frac{1}{2002}$$

* Tương tự ta có bài toán sau :

Bài toán : Tính giá trị của biểu thức:

$$a) A = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}}{\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.99} + \dots + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}}$$

$$b) B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \dots + \frac{1}{1}}$$

Hướng dẫn:

a) Biến đổi số bị chia:

$$\left(1 + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{97}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{95}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{51}\right) = \frac{100}{1.99} + \frac{100}{3.97} + \frac{100}{5.95} + \dots + \frac{100}{49.51}$$

Biểu thức này gấp 50 lần số chia. Vậy $A = 50$.

$$\frac{100-1}{1} + \frac{100-2}{2} + \frac{100-3}{3} + \dots + \frac{100-99}{99} =$$

$$b) \text{ Biến đổi số chia: } = \left(\frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{99}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{99}{99}\right) =$$

$$= 100 + 100\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}\right) - 99 = 1 + 100\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right)$$

Biểu thức này bằng 100 lần số bị chia. Vậy $B = \frac{1}{100}$.

4) Áp dụng đẳng thức : $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$ ($a \neq 0$), ta có :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2009.2010}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2009} = 1 - \frac{1}{2010} = \frac{2009}{2010}$$

5) Áp dụng kết quả : $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} \right) = \frac{1}{a(a+1)(a+2)}$, ta có :

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{1998.1999.2000}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1998.1999} - \frac{1}{1999.2000} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1999.2000} \right) = \frac{1999.2000 - 2}{2.1999.2000}$$

6) Hãy điền vào ô trống để có đẳng thức đúng : $\frac{1}{a(a+2)} = \frac{1}{\square} - \frac{1}{\square}$, sau đó áp dụng

kết quả nhận được vào giải bài toán.

* **Chú ý :** Từ kết quả các bài 4,5,6 ở trên ta rút ra một số quy luật (Công thức) sau đây :

$$1) \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$2) \frac{k}{n(n+1)} = k \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$3) \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right).$$

$$4) \frac{k}{n(n+k)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right).$$

$$5) \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$6) \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right).$$

$$7) \frac{1}{n \cdot (n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1) \cdot n}.$$

$$8) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} \right) = \frac{1}{a(a+1)(a+2)}$$

(Trong đó: $n, k \in \mathbb{N}^*, n > 1$)

7) Nhân lần lượt cả tử và mẫu mỗi phân số với 1; x; xy với chú ý $xyz = 1$, ta được:

$$A = \frac{5}{x+xy+1} + \frac{5}{y+yz+1} + \frac{5}{z+zx+1} = \frac{5}{x+xy+1} + \frac{5x}{xy+1+x} + \frac{5xy}{1+x+xy} = \frac{5(1+x+xy)}{x+xy+1} = 5.$$

* **Chú ý**: Cũng có thể đặt như phân ví dụ mẫu.

8) Từ giả thiết $xyz = 1992$ (1) suy ra: $xy = \frac{1992}{z}$ (2), thay (1) và (2) vào vế trái đẳng thức được:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1992x}{xy+1992x+1992} + \frac{y}{yz+y+1992} + \frac{z}{xz+z+1} \\ &= \frac{1992x}{\frac{1992}{z}+1992x+1992} + \frac{y}{yz+y+xyz} + \frac{z}{xz+z+1} \\ &= \frac{xz}{1+xz+z} + \frac{y}{y(z+1+xz)} + \frac{z}{xz+z+1} \\ &= \frac{xz}{1+xz+z} + \frac{1}{z+1+xz} + \frac{z}{xz+z+1} \\ &= \frac{1+xz+z}{1+xz+z} \\ &= 1 = VP \end{aligned}$$

$$9) a) \left[6 \left(\frac{-1}{3} \right)^3 - 3 \left(\frac{-1}{3} \right) + 1 \right] : \left(\frac{-1}{3} - 1 \right) = \left[6 \cdot \frac{-1}{27} + 1 + 1 \right] : \frac{-4}{3} = \left(\frac{-2}{9} + 2 \right) : \frac{-4}{3} = \frac{16}{9} \cdot \frac{-3}{4} = \frac{-4}{3}$$

$$b) (6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3^3) : 13 = [6^2(6+3) + 3^3] : 13 = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 3^3) : 13 = 3^3(3 \cdot 2^2 + 1) : 13 = 3^3 \cdot 13 : 13 = 3^3 = 27$$

c)

$$\frac{9}{10} - \frac{1}{90} - \frac{1}{72} - \frac{1}{56} - \frac{1}{42} - \frac{1}{30} - \frac{1}{20} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{9}{10} - \left[\frac{1}{90} + \frac{1}{72} + \frac{1}{56} + \frac{1}{42} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{9}{10} - \left[\frac{1}{90} + \frac{1}{72} + \frac{1}{56} + \frac{1}{42} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3} \right) \right] \\
 &= \frac{9}{10} - \left[\frac{1}{90} + \frac{1}{72} + \frac{1}{56} + \frac{1}{42} + \frac{1}{30} + \left(\frac{1}{20} + \frac{3}{4} \right) \right] \\
 &= \frac{9}{10} - \left[\frac{1}{90} + \frac{1}{72} + \frac{1}{56} + \frac{1}{42} + \left(\frac{1}{30} + \frac{4}{5} \right) \right] \\
 &= \dots \\
 &= \frac{9}{10} - \frac{9}{10} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

10) Tìm x, biết : $\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} + 4 = 0$ (HSG quận Hoàn Kiếm HN – 2004)

+ Làm tương tự Câu 5 :

$$\begin{aligned}
 &\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} + 4 = 0 \\
 \Leftrightarrow &\frac{315-x}{101} + 1 + \frac{313-x}{103} + 1 + \frac{311-x}{105} + 1 + \frac{309-x}{107} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\frac{416-x}{101} + \frac{416-x}{103} + \frac{416-x}{105} + \frac{416-x}{107} = 0 \\
 \Leftrightarrow &(416-x) \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \frac{1}{107} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Vì $\left(\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \frac{1}{107} \right) > 0$ nên dẫn đến $416 - x = 0$ hay $x = 416$.

11) Tìm x, biết :

a) Kết quả : $x = 48$.

$$\begin{aligned}
 b) &\left(|x| - \frac{1}{8} \right) \left(-\frac{1}{8} \right)^5 = \left(-\frac{1}{8} \right)^7 \\
 \Leftrightarrow &|x| - \frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{8} \right)^7 : \left(-\frac{1}{8} \right)^5 \\
 \Leftrightarrow &|x| - \frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{8} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow &|x| = \frac{1}{64} + \frac{1}{8} \\
 \Leftrightarrow &|x| = \frac{9}{64} \\
 \Leftrightarrow &x = \frac{9}{64}; x = -\frac{9}{64}
 \end{aligned}$$

$$c) x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$$

+ Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$.

12) Tính :

a) $A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 1999 - 2000 + 2001 + 2002 - 2003$

b) $B = \left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{9} - 1\right)\left(\frac{1}{16} - 1\right)\left(\frac{1}{25} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{121} - 1\right)$

a)

b) Từ 4 đến 121 có các số chính phương là : 4;9;16;25;36;49;64;81;100;121 nên :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{9} - 1\right)\left(\frac{1}{16} - 1\right)\left(\frac{1}{25} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{121} - 1\right) \\ &= \left(\frac{-3}{4} \cdot \frac{-8}{9}\right) \cdot \left(\frac{-15}{16} \cdot \frac{-24}{25}\right) \cdot \left(\frac{-35}{36} \cdot \frac{-48}{49}\right) \cdot \left(\frac{-63}{64} \cdot \frac{-80}{81}\right) \cdot \left(\frac{-99}{100} \cdot \frac{-120}{121}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}\right) \cdot \left(\frac{20}{21} \cdot \frac{35}{36}\right) \cdot \frac{54}{55} = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{25}{27}\right) \cdot \frac{54}{55} = \frac{5}{9} \cdot \frac{54}{55} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

13) a) Ta có : $\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} - \frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004} = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-7}{15}$

b) **Biết :** $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025$. **Tính :** $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$.

+ Ta có : $S = 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) = 8 \cdot 3025 = 24200$.

c) Cho $A = \frac{x^3 - 3x^2 + 0,25xy^2 - 4}{x^2 + y}$. **Tìm giá trị của A, biết $x = \frac{1}{2}$ và y là số nguyên**

âm lớn nhất.

(HSG - quận Tân Phú – T.p HCM – 2004)

+ Vì y là số nguyên âm lớn nhất nên $y = -1$ cùng với $x = \frac{1}{2}$ thay vào biểu

thức A, được :

$$A = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - 4}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-9}{2} : \frac{-3}{4} = \frac{-9}{2} \cdot \frac{-4}{3} = 6.$$

14) Tìm x, biết : $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$. (HSG - quận Tân Phú – T.p HCM – 2004)

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$$

$$\Leftrightarrow 3^x(1 + 3 + 3^2) = 117$$

$$\Leftrightarrow 13 \cdot 3^x = 117$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 117 : 13$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

15) Thực hiện phép tính :

$$\frac{1\frac{111}{31} \cdot 4\frac{3}{7} - \left(1,5 - 6\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{19}\right) \left(-1; \frac{14}{93}\right)}{4\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \left(12 - 5\frac{1}{3}\right)} = \dots = \quad \text{(HSG - Hà Tây -$$

2003)

16) Thực hiện phép tính : $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-b)(c-a)}$
 (HSG quốc gia - 1963)

+

17) Gọi n là số tự nhiên , tính tích sau đây theo n :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{(HSG quốc gia - 1978)}$$

+ Ta có :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

18) Vì $abc = 1$ nên ta có thể đặt : $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$ với x,y,z là các số khác 0. Khi

đó ta có :

a) Vế trái của đẳng thức a) được biến đổi thành :

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z}} + \frac{1}{1 + \frac{y}{z} + \frac{y}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}} = \frac{yz}{xy + yz + zx} + \frac{zx}{xy + yz + zx} + \frac{xy}{xy + yz + zx} = \frac{yz + zx + xy}{xy + yz + zx} = 1;$$

Vậy ta có ĐPCM.

b) Vế trái của đẳng thức b) được biến đổi thành :

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right) \left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right) \left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) = \frac{x-y+z}{y} \cdot \frac{y-z+x}{z} \cdot \frac{z-x+y}{x} = \frac{(x-y+z) \cdot (y-z+x) \cdot (z-x+y)}{xyz}; (*)$$

Tương tự ta cũng biến đổi được vế phải của đẳng thức b) về biểu thức (*) suy ra ĐPCM.

19) Đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\frac{1}{\frac{a}{b} + 1} + \frac{1}{\frac{b}{c} + 1} + \frac{1}{\frac{c}{a} + 1} = \frac{3}{2}; (*)$$

Đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a}$ ta có x,y,z là các số dương thoả mãn $xyz = 1$. Khi đó ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx) - (x + y + z) = 0$$

(quy đồng mẫu số , khai triển các tích và rút gọn với chú ý $xyz = 1$)

$$\Leftrightarrow xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } y = 1 \text{ hoặc } z = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \\ c=a \end{cases}$$

20) Biến đổi đẳng thức đã cho tương đương với :

$$(a+b+c-x) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} \right) = 0$$

Nếu : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} \neq 0$ thì $x = a + b + c$

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} = 0$ thì có vô số giá trị của x thoả mãn .

21) Từ giả thiết ta có : $x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz}$

Tương tự : $x - z = \frac{y-x}{yx}$; $y - z = \frac{z-x}{zx}$

Nhân theo từng vế ba đẳng thức trên được :

$$(x-y)(x-z)(y-z) = \frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{x^2 y^2 z^2}$$

Đẳng thức này chỉ xảy ra khi $x^2 y^2 z^2 = 1$ hoặc $x = y = z$.

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG ĐẠI SỐ 7

-----***-----

CHUYÊN ĐỀ 1. CÁC PHÉP TOÁN TRONG Q.

Buổi : 1
2009

Ngày soạn: 15 /9 /

Nội dung : So sánh hai số hữu tỉ

I. Kiến thức cần nhớ :

1. HS cần nắm vững những kiến thức sau :

+ SHT là số có thể viết dưới dạng $\frac{a}{b}$ với a, b thuộc Z ; b khác 0.

+ Để so sánh hai số hữu tỉ x và y ta làm như sau :

Viết x, y dưới dạng hai phân số cùng mẫu dương $x = \frac{a}{m}$; $y = \frac{b}{m}$ ($m > 0$).

So sánh các tử : Nếu $a < b$ thì $x < y$

Nếu $a = b$ thì $x = y$

Nếu $a > b$ thì $x > y$

2. Bổ sung :

Cho $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$ (a, b, c, d thuộc Z ; $b, d > 0$).

$x = y \iff ad = bc$

$x < y \iff ad < bc$

$x > y \iff ad > bc$

II. Dạng bài tập toán :

Bài tập 1: Cho 2 SHT $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ ($b > 0$; $d > 0$). CMR :

Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Giải:

Ta có $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies ad < bc$ (1) . Từ (1) ta có $ab + ad < ab + bc \iff a(b+d) < (a+c)b$ hay

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ (2). Từ (1) ta lại có $ad + cd < bc + cd \iff d(a+c) < c(b+c)$

hay $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ (3) . Từ (2) và (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ (đpcm)

(Giữa hai SHT, bao giờ cũng tồn tại một số hữu tỉ).

□p dụng viết ba số hữu tỉ xen giữa hai SHT $\frac{-1}{2}$ và $\frac{-1}{3}$.

Bài 3: Cho a, b thuộc Z ($b > 0$). Hãy so sánh hai SHT $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$.

Giải :

Ta có $a(b+1) = ab + a$ và $b(a+1) = ba + b$. Nếu $a > b$ thì $a(b+1) > b(a+1)$

Nếu $a(b+1) > b(a+1)$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$, nếu $a < b$; $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$, nếu $a > b$.

□p dụng : So sánh $\frac{2}{7}$ và $\frac{3}{8}$; $\frac{-17}{25}$ và $\frac{-16}{26}$.

Bài 4 : Cho $x = \frac{12}{b-15}$ với b thuộc Z . Xác định b để:

a, x là một SHT.

d, $x = -1$.

b, x là SHT dương.

g, $x > 1$.

c, x là SHT âm.

e, $0 < x < 1$

Bài 5: Cho các SHT x, y, z, với $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$; $z = \frac{m}{n}$, trong đó $m = \frac{a+c}{2}$, $n = \frac{b+d}{2}$.

Cho biết x khác y, hãy so sánh x với z, y với z?

Giải:

Nếu $x < y$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ hay $\frac{a}{b} < \frac{2m}{2n} < \frac{c}{d}$, suy ra $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}$, do đó $x < y < z$.

T-ong tự, nếu $x > y$ thì $x > z > y$.

Bài 6:

Cho các SHT $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ và $z = \frac{m}{n}$. Biết $ad - bc = 1$; $cn - dm = 1$; $b, d, n > 0$.

a, Hãy so sánh các số x, y, z.

b, So sánh y với t biết $t = \frac{a+m}{b+n}$ với $b+n$ khác 0.

Giải:

a, $ad - bc = 1 \Rightarrow ad > bc \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (1)

$cn - dm = 1 \Rightarrow cn > dm \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{m}{n}$ (2) (Vì $b, d, n > 0$).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{m}{n}$. Vậy $x > y > z$.

b, $ad - bc = cn - dm = 1 \Rightarrow ad + dm = bc + cn \Rightarrow d(a + m) = c(b + n)$.

Vậy $\frac{c}{d} = \frac{a+m}{b+n}$, suy ra $y = t$.

BTVN: Cho sáu số nguyên d-ong $a < b < c < d < m < n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+c+m}{a+b+c+d+m+n} < \frac{1}{2}$$

H-ớng dẫn: $a < b \Rightarrow 2a < a + b$; $c < d \Rightarrow 2c < c + d$; $m < n \Rightarrow 2m < m + n$.

Suy ra: $2(a+c+m) < (a+b+c+d+m+n)$, từ đó suy ra điều phải c/m.

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG ĐẠI SỐ 7

CHUYÊN ĐỀ 1: CÁC PHÉP TOÁN TRONG Q.

Buổi : 2
2009

Ngày soạn: 25 / 9 /

Nội dung : Cộng , trừ, nhân, chia số hữu tỉ

I. Kiến thức cần nhớ :

A. HS cần nắm vững những kiến thức sau:

1. Cộng, trừ SHT: Nếu $x = \frac{a}{m}$; $y = \frac{b}{m}$ (a, b, m thuộc Z , m > 0) thì :

$$x+y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} \quad ; \quad x - y = x + (-y) = \frac{a}{m} + \left(-\frac{b}{m}\right) = \frac{a-b}{m}.$$

2. Phép cộng trong Q cũng có các t/c cơ bản nh phép cộng trong Z; cũng có quy tắc “ dấu ngược ” nh đối với tổng đại số trong Z

3. Quy tắc chuyển vế : Với x, y, z, t thuộc Q thì :

$$x + y - z = t \Leftrightarrow x - t = -y + z.$$

B. Bổ sung:

Tính chất của đẳng thức và quy tắc “ chuyển vế ” vẫn đúng với BĐT

II. Dạng bài tập toán :

Bài 1:

$$\begin{aligned} \text{Tính } & \frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ & + & \\ & \frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13} & \frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Bài 2:

a,
$$\frac{(1+2+3+\dots+100).(1/2-1/5-1/7-1/9).(6,3.12-21.3,6)}{1/2+1/3+1/4+\dots+1/100}$$

b,
$$\frac{1/9-1/7-1/11}{4/9-4/7-4/11} + \frac{3/5-3/25-3/125-3/625}{4/5-4/25-4/125-4/625}$$

HD:

a, Chú ý rằng $6,3.12 - 21.3,6 = 63.1,2 - 63.1,2 = 0$. Do đó biểu thức bằng 0.

b, Kết quả bằng $1/4 + 3/4 = 1$.

Bài 3: Cho $A = \left(\frac{1}{2.2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3.3} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4.4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100.100} - 1\right)$.

So sánh A với $-\frac{1}{2}$

Giải :

A là tích của 99 số âm. Do đó:

$$\begin{aligned} -A &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{10000}\right) \\ &= \frac{3}{2.2} \cdot \frac{8}{3.3} \cdot \frac{15}{4.4} \cdot \frac{9999}{10000} \\ &= \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \dots \cdot \frac{99.101}{10000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1.2.3.....98.98}{2.3.4.....99.100} \cdot \frac{3.4.5...100.101}{2.3.4...99.100} \\
 &= \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{1}{2} . \quad \text{Do đó } A < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Bài 4: Tính:

$$B = \frac{1}{90} - \frac{1}{72} - \frac{1}{56} - \frac{1}{42} - \frac{1}{30} - \frac{1}{20} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$$

Bài 5: CMR không tồn tại hai SHT x và y trái dấu, không đối nhau thỏa mãn đẳng thức :

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} .$$

Giải : Giả sử tồn tại hai số hữu tỉ x và y thỏa mãn đẳng thức $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Suy ra

$$\frac{1}{x+y} = \frac{y+x}{xy} \Leftrightarrow (x+y)(x+y) = xy. \quad \square \text{ẳng thức này không xảy ra vì } (x+y).(x+y) > 0$$

còn $x.y < 0$ (do x và y là hai số trái dấu, không đối nhau).

Bài 6: Tìm 2 SHT x và y (y khác 0), biết rằng : $x - y = xy = x : y$.

Giải : Từ $x - y = xy \Rightarrow x = xy + y = y(x+1) \Rightarrow x : y = x+1$ (do y khác 0). Theo đề bài thì

$$x : y = x - y, \text{ suy ra } x + 1 = x - y \Rightarrow y = -1 .$$

$$\text{Thay } y = -1 \text{ vào } x - y = xy \text{ đ- ợc } x - (-1) = x.(-1) \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} .$$

$$\text{Vậy } x = -1/2 ; y = -1.$$

Bài 7: Cho $M = x(x-3)$. Với giá trị nào của x thì :

$$a, M = 0 ; \quad b, M > 0 ; \quad c, M < 0 .$$

Bài 8 : Cho $P = \frac{x-1}{x}$. Với giá trị nào của x thì $P = 0 ; \quad P > 0 ; \quad P < 0$.

BTVN: Có tồn tại hai số dương a và b khác nhau sao cho : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$ không?

$$\text{HD : Giả sử } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b} \text{ thì } \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a-b} \Rightarrow (b-a)(a-b) = ab .$$

Vế trái có giá trị âm (vì tích của hai số đối nhau khác 0), vế phải có giá trị dương (vì là tích hai số dương). Vậy không tồn tại hai số dương a và b khác nhau mà $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$.

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG HÌNH HỌC 7

-----***-----

BUỔI 3: Đ-ỜNG THẲNG VUÔNG GÓC - Đ-ỜNG THẲNG SONG SONG

NGÀY SOẠN : 10/ 10/ 2009

I. Kiến thức cần nhớ:

A. HS cần nắm vững những kiến thức sau:

- Định nghĩa hai góc đối đỉnh ; Tính chất hai góc đối đỉnh .
- Định nghĩa hai đt vuông góc ; Tính chất duy nhất của hai đt vuông góc : Có một và chỉ một đt đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đt cho trước.
- Đồng trung trực của đoạn thẳng.
- Định nghĩa hai đường thẳng song song ;
- Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song $a // b$, nếu :
 - + , Cặp góc so le trong bằng nhau
 - + , Cặp góc đồng vị bằng nhau.
 - + , Cặp góc trong cùng phía bù nhau.
- Tiên đề Ô-clit về hai đường thẳng song song . Từ đó suy ra : Hai đt phân biệt cùng song song với đt thứ ba thì song song với nhau.
- Tính chất của hai đt song song : Nếu một đt cắt hai đt song song thì :
 - + , Cặp góc so le trong bằng nhau
 - + , Cặp góc đồng vị bằng nhau.
 - + , Cặp góc trong cùng phía bù nhau.

B. Bổ sung:

- Mỗi góc chỉ có một góc đối đỉnh.
- Mỗi đoạn thẳng chỉ có một đồng trung trực.
- Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc .
- Hai góc có cạnh tương ứng song song.
- Có thể dùng tiên đề Ô-clit để c/m ba điểm thẳng hàng : Cho ba điểm A, B, C ở ngoài đt a , nếu có $AB // a$ và $AC // a$ thì A, B, C thẳng hàng.
- Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì :
 - + Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.
 - + Chúng bù nhau nếu góc này nhọn , góc kia tù.
 - + Nếu một góc vuông thì góc còn lại cũng vuông.

II. Dạng bài tập toán:

Bài 1 : Xét các cặp góc đối đỉnh \hat{A}_1 và \hat{A}_3 ; \hat{A}_2 và \hat{A}_4 được tạo khi hai đt cắt nhau tại A. Tìm số đo mỗi góc ở trong những trường hợp sau :

- a, $\hat{A}_1 + \hat{A}_4 = 100$
- b, $\hat{A}_2 - \hat{A}_4 = 20$
- c, $3. \hat{A}_1 = 2 \hat{A}_2.$

Bài 2 : CMR hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

Giải

Cách 1: $\angle xoy = \angle aob$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \angle xoy = \frac{1}{2} \cdot \angle aob$

$$\Rightarrow \hat{o}_1 = \hat{o}_4 .$$

Ta có $\hat{o}_4 + \angle xon = 180$ (kề bù).

$$\Rightarrow \hat{o}_1 + \angle xon = 180 .$$

Vì om và on nằm về hai phía của xa nên om và oa là hai tia đối nhau.

Cách 2 : $\hat{o}_1 = \hat{o}_2 ; \hat{o}_3 = \hat{o}_4 ; \angle xob = \angle aoy .$

Mà tổng 6 góc này bằng 360 nên : $\hat{o}_1 + \hat{o}_3 + \angle xon = 180 .$

Suy ra om và on là hai tia đối nhau .

Bài 3: Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

Giải : Gọi AOB và BOC là hai góc kề bù, các tia OM, ON

thứ tự là các tia phân giác của chúng. Tpcm:

$$OM \perp ON$$

Thật vậy, hai góc AOC và BOC kề bù nên tia OC nằm giữa hai tia OA, ON

$\angle AOC + \angle BOC = 180$. Tia OM là tia phân giác của góc AOC nên tia OM nằm giữa hai tia

OA, OC (2) và $\angle MOC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC$. Tia ON là tia phân giác của góc BOC nên tia

ON nằm giữa hai tia OB, OC (3) và $\angle CON = \frac{1}{2} \angle BOC$.

Từ (1), (2), (3) suy ra tia OC nằm giữa hai tia OM, ON, do đó :

$$\angle MON = \angle MOC + \angle CON = \frac{\angle AOC + \angle BOC}{2} + \frac{180}{2} = 90 .$$

Hai tia OM , ON cắt nhau tại O và $\angle MON = 90$ nên OM vuông góc với ON .

Bài 4: Cho góc MON có số đo 120 . Vẽ các tia OA , OB ở trong góc đó sao cho OA vuông góc với OM, OB vuông góc với ON.

a) Chứng tỏ rằng $\angle AON = \angle BOM$.

b) Vẽ tia Ox và tia Oy thứ tự là các tia phân giác của các góc AON và BOM. Chứng tỏ rằng Ox vuông góc với Oy.

c) Kể tên những cặp góc có cạnh tọng ứng vuông góc.

Giải :

a) OA vuông góc với OM nên $\angle AOM = 90$

OB vuông góc với ON nên $\angle BON = 90$

Các tia OA, OB ở trong góc MON nên:

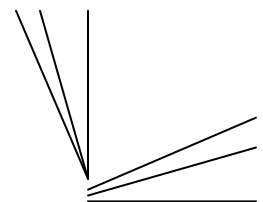
$$\angle AON = \angle MON - \angle AOM = 120 - 90 = 30$$

$$\angle BOM = \angle MON - \angle BON = 120 - 90 = 30 .$$

Vậy $\angle AON = \angle BOM = 30$.

b) Tia Ox là tia phân giác của góc AON nên $\angle Nox = 15$.

Tia Oy là tia phân giác của góc BOM nên $\angle MOy = 15$.



Tia Ox nằm giữa hai tia OM, ON nên $\angle MOx = \angle MON - \angle NOx = 120 - 15 = 105$.
 Tia Oy nằm giữa hai tia OM, Ox nên $\angle xOy = \angle MOx - \angle MOy = 105 - 15 = 90$.
 Vậy Ox vuông góc với Oy.

Bài 5: \square miền trong góc tù xOy, vẽ các tia Oz, Ot sao cho Oz vuông góc với Ox, Ot vuông góc với Oy. CMR :

a) $\angle xOt = \angle yOz$; b) $\angle xOy + \angle zOt = 180$.

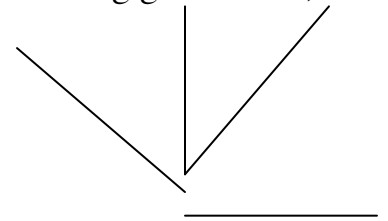
Giải:

a) $\angle xOt + \angle zOt = \angle xOz = 90$ nên $\angle xOt = 90 - \angle zOt$ (1).

$\angle yOz + \angle zOt = \angle yOt = 90$ nên $\angle yOz = 90 - \angle zOt$ (2).

Vậy $\angle xOt = \angle yOz$.

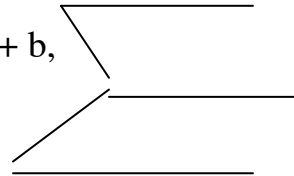
b) $\angle xOy + \angle zOt = (\angle xOz + \angle zOy) + \angle zOt = \angle xOz + (\angle zOy + \angle zOt)$
 $= \angle xOz + \angle yOz = 90 + 90 = 180$



BTVN: Cho hình vẽ, biết $\hat{A} = a$, $C = b$, $\angle ABC = a + b$,

$\angle ABm = 180 - a$. CMR: a, Ax // Bm.

b, Cy // Bm.



Ngày soạn:

22 / 10 / 2009

Buổi : 4

Nội dung : Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ

I. Kiến thức cần nhớ :

Với x thuộc Q thì: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$; $|x| = |-x|$; $|x| \geq 0$; $|x| \geq x$.

Với $|x| < m \Leftrightarrow -m < x < m$.

$|x| > m \Leftrightarrow$ Hoặc $x > m$ hoặc $x < -m$.

II. Dạng bài tập:

Bài 1: Tìm x, biết a) $|2,5 - x| = 1,3$.

b) $16 - |x - 0,2| = 0$.

c) $|x - 1,5| + |2,5 - x| = 0$.

Bài 2: Tìm GTLN của :

a) $A = 0,5 - |x - 3,5|$.

b) $B = -|1,4 - x| - 2$.

c) $C = 10 - 4|x - 2|$.

Bài 3: Tìm GTNN của :

a) $M = 1,7 + |3,5 - x|$.

b) $N = |x + 2,8| - 3,5$.

c) $L = 2|3x - 1| - 4$.

d) $Q = \frac{6}{|x|-3}$ (với x là số nguyên).

Gợi ý : áp dụng công thức $|x| \geq 0$ và $0 \geq -|x|$.

Câu 3(d) : $|x| \geq 3$ thì $Q > 0$

Xét $|x| < 3$ thì do x thuộc Z nên $|x|$ bằng 0 hoặc 1 hoặc 2, khi đó Q bằng $-\infty$ hoặc -3 hoặc -6. Vậy GTNN của Q bằng -6 khi và chỉ khi $x = 2$ hoặc $x = -2$.

Bài 4: Cho x , y thuộc Q . Chứng tỏ rằng :

a) $|x| + |y| \geq |x + y|$

b) $|x - y| \geq |x| - |y|$

(Đề thi HSG huyện Lộc Hà năm học 2007-2008).

Giải : a) Với mọi x , y thuộc Q ta luôn có $|x| \geq x$. và $|x| \geq -x$.

$$|y| \geq y. \text{ và } |y| \geq -y$$

$$\Rightarrow |x| + |y| \geq x + y \text{ và } |x| + |y| \geq -(x + y) \text{ hay } x + y \geq -(|x| + |y|).$$

$$\text{Do đó : } |x| + |y| \geq x + y \geq -(|x| + |y|).$$

$$\text{Vậy } |x| + |y| \geq |x + y| .$$

b) Theo kết quả câu a có : $|x - y| + |y| \geq |x - y + y| = |x| \Rightarrow |x - y| \geq |x| - |y|$.

Bài 5: Tìm GTNN của $A = |x - 2009| + |x + 1|$.