

TUYỂN CHỌN MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO LỚP 7  
**A. PHẦN ĐẠI SỐ:**

Bài toán 1. So sánh:  $2009^{20}$  và  $20092009^0$ .

Bài toán 2. Tính tỉ số  $\frac{A}{B}$ , biết:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009}$$

$$B = \frac{2008}{1} + \frac{2007}{2} + \frac{2006}{3} + \dots + \frac{2}{2007} + \frac{1}{2008}$$

Bài toán 3. Cho  $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$ .

Chứng minh rằng:  $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$  có giá trị không phải là số tự nhiên.

Bài toán 4. Tìm  $x; y \in \mathbb{Z}$  biết:

- a.  $25 - y^2 = 8(x - 2009)$
- b.  $x^3 y = x y^3 + 1997$
- c.  $x + y + 9 = xy - 7$ .

Bài toán 5. Tìm  $x$  biết :

- a.  $|5(2x+3)| + |2(2x+3)| + |2x+3| = 16$
- b.  $|x^2 + |6x-2|| = x^2 + 4$ .

Bài toán 6. Chứng minh rằng :  $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Bài toán 7. Cho  $n$  số  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mỗi số nhận giá trị 1 hoặc -1. Chứng minh rằng nếu  $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \dots + x_n \cdot x_1 = 0$  thì  $n$  chia hết cho 4.

Bài toán 8. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{4n-2}} - \frac{1}{2^{4n}} + \dots + \frac{1}{2^{2002}} - \frac{1}{2^{2004}} < 0,2$$

Bài toán 9. Tính giá trị của biểu thức  $A = x^n + \frac{1}{x^n}$  giả sử  $x^2 + x + 1 = 0$ .

Bài toán 10. Tìm max của biểu thức:  $\frac{3-4x}{x^2+1}$ .

Bài toán 11. Cho  $x, y, z$  là các số dương. Chứng minh rằng :

$$D = \frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{2y+z+x} + \frac{z}{2z+x+y} \leq \frac{3}{4}$$

Bài toán 12. Tìm tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức :

$$A(x) = (3 - 4x + x^2)^{2004} \cdot (3 + 4x + x^2)^{2005}$$

Bài toán 13. Tìm các số  $a, b, c$  nguyên dương thỏa mãn :  $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$  và  $a + 3 = 5^c$

Bài toán 14. Cho  $x = 2005$ . Tính giá trị của biểu thức :

$$x^{2005} - 2006x^{2004} + 2006x^{2003} - 2006x^{2002} + \dots - 2006x^2 + 2006x - 1$$

Bài toán 15. Rút gọn biểu thức :  $N = \frac{x|x-2|}{x^2+8x-20} + 12x - 3$

Bài toán 16. Trong 3 số  $x, y, z$  có 1 số dương, 1 số âm và một số 0. Hỏi mỗi số đó thuộc loại nào biết :  $|x| = y^3 - y^2z$

Bài toán 17. Tìm hai chữ số tận cùng của tổng sau :

$$B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2009}$$

Bài toán 18. Cho  $3x - 4y = 0$ . Tìm min của biểu thức :  $M = x^2 + y^2$ .

Bài toán 19. Tìm  $x, y, z$  biết :  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}$ .

Bài toán 20. Tìm  $x, y$  biết rằng :  $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$

Bài toán 21. Cho  $a$  là số gồm  $2n$  chữ số 1,  $b$  là số gồm  $n + 1$  chữ số 1,  $c$  là số gồm  $n$  chữ số 6. Chứng minh rằng  $a + b + c + 8$  là số chính phương.

Bài toán 22. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $a$ , tồn tại số tự nhiên  $b$  sao cho  $ab + 4$  là số chính phương.

Bài toán 23. Chứng minh rằng nếu các chữ số  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $\overline{ab} : \overline{cd} = a : c$  thì  $\overline{abbb} : \overline{bbbc} = a : c$ .

Bài toán 24. Tìm phân số  $\frac{m}{n}$  khác 0 và số tự nhiên  $k$ , biết rằng  $\frac{m}{n} = \frac{m+k}{nk}$ .

Bài toán 25. Cho hai số tự nhiên  $a$  và  $b$  ( $a < b$ ). Tìm tổng các phân số tối giản có mẫu bằng 7, mỗi phân số lớn hơn  $a$  nhưng nhỏ hơn  $b$ .

Bài toán 26. Chứng minh rằng:  $A = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + n$  là số chính phương ( $n$  lẻ).

Bài toán 27. Tìm  $n$  biết rằng:  $n^3 - n^2 + 2n + 7$  chia hết cho  $n^2 + 1$ .

Bài toán 28. Chứng minh rằng:  $B = 2^{2^{n+1}} + 3$  là hợp số với mọi số nguyên dương  $n$ .

Bài toán 29. Tìm số dư khi chia  $(n^3 - 1)^{111} \cdot (n^2 - 1)^{333}$  cho  $n$ .

Bài toán 30. Tìm số tự nhiên  $n$  để  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  chia hết cho 5.

Bài toán 31. a. Chứng minh rằng: Nếu  $a$  không là bội số của 7 thì  $a^6 - 1$  chia hết cho 7.

b. Cho  $f(x+1)(x^2-1) = f(x)(x^2+9)$  có ít nhất 4 nghiệm.

c. Chứng minh rằng:  $a^5 - a$  chia hết cho 10.

Bài toán 32. Tính giá trị của biểu thức:  $A = 5y^4 + 7x - 2z^5$  tại  $(x^2 - 1) + (y - z)^2 = 16$ .

Bài toán 33. Chứng minh rằng:

a.  $0,5 (2007^{2005} - 2003^{2003})$  là một số nguyên.

b.  $M = \frac{1986^{2004} - 1}{1000^{2004} - 1}$  không thể là số nguyên.

c. Khi viết dưới dạng thập phân thì số hữu tỉ  $\left(\frac{9}{11} - 0,81\right)^{2004}$  có ít nhất 4000 chữ số 0 đầu

tiên sau dấu phẩy.

Bài toán 34. So sánh A và B biết :

$$A = \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{104^2} + \frac{1}{105^2} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

Bài toán 35. Tìm  $x$  biết :

$$a. \frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

$$b. (4x - 3)^4 = (4x - 3)^2$$

Bài toán 36. Ba ô tô cùng khởi hành từ A đi về phía B. Vận tốc của ô tô thứ nhất kém vận tốc của ô tô thứ hai là 3km/h. Thời gian ô tô thứ nhất, thứ hai, thứ ba đi hết quãng đường AB lần lượt là 40 phút,  $\frac{5}{8}$  giờ,  $\frac{5}{9}$  giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Bài toán 37. Chứng minh rằng  $\sqrt{2} + a$  ( $a \in \mathbb{Z}^+$ ) là số vô tỉ.

Bài toán 38. Cho các số thực  $a, b$  sao cho tập hợp  $\{ a^2 + a ; b \}$  và  $\{ b^2 + b ; b \}$  bằng nhau. Chứng minh rằng :  $a = b$ .

Bài toán 39. Cho năm số tự nhiên  $a, b, c, d, e$  thỏa mãn :  $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$ .

Chứng minh rằng :  $a = b = c = d = e$ .

Bài toán 40. Tìm  $x, y$  biết:

a.  $5^x - 17^y = 2^{xy}$  và  $x - y = 5; 2x + 3^y = xy$ .

b.  $x + 2y - 3z = 5^{xyz}$  và  $(x - 2y)(y + 7) - x = 19^2$  .( $xyz > 0$ )

### B. Phần hình học

Bài toán 41. Tính  $\hat{A}$  của tam giác ABC cân tại A biết đường thẳng  $d$  đi qua đỉnh A và chia tam giác ABC thành hai tam giác cân.

Bài toán 42. Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại A, trung tuyến AM. Lấy  $E \in BC$ .  $BH, CK \perp AE$  ( $H, K \in AE$ ). Chứng minh rằng  $\triangle MHK$  vuông cân.

Bài toán 43. Cho  $\triangle ABC$  có góc  $ABC = 50^\circ$ ; góc  $BAC = 70^\circ$ . Phân giác trong góc ACB cắt AB tại M. Trên MC lấy điểm N sao cho góc  $MBN = 40^\circ$ . Chứng minh rằng :  $BN = MC$ .

Bài toán 44. Cho  $\triangle ABC$ . Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác vuông cân ở A là ABE và ACF. Vẽ  $AH \perp BC$ . Đường thẳng AH cắt EF tại O. Chứng minh rằng O là trung điểm của EF.

Bài toán 45. Cho  $\triangle ABC$ . Qua A vẽ đường thẳng  $xy \parallel BC$ . Từ điểm M trên cạnh BC vẽ các đường thẳng song song với AB, AC chúng cắt xy theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng :

a.  $\triangle ABC = \triangle MDE$

b. Ba đường thẳng AM, BD, CE cùng đi qua một điểm.

Bài toán 46. Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho  $BM = BA$  ;  $CN = CA$ . Tính  $\widehat{MAN}$ .

Bài toán 47. Cho  $\triangle ABC$  có  $\hat{A} = 90^\circ$  ( $AB < AC$ ), phân giác AD. Từ D vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại M. Tính  $\widehat{MBD}$ .

Bài toán 48.  $\triangle ABC$  có  $\hat{B} = 75^\circ$  ;  $\hat{C} = 60^\circ$ . Kéo dài BC một đoạn thẳng CD sao cho  $CD = \frac{1}{2} BC$ .

Tính  $\widehat{ADB}$ .

Bài toán 49. Cho  $\triangle ABC$  cân,  $\hat{A} = 80^\circ$ . Trên cạnh BC lấy điểm I sao cho  $\widehat{BAI} = 50^\circ$  ; trên cạnh AC lấy điểm K sao cho  $\widehat{ABK} = 30^\circ$ . Hai đoạn thẳng AI và BK cắt nhau tại H. Chứng minh rằng  $\triangle HIK$  cân.

Bài toán 50. Cho  $\triangle ABC$  cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh BC sao cho  $MB < MC$ . Lấy điểm O trên đoạn thẳng AM. Chứng minh rằng  $\widehat{AOB} > \widehat{AOC}$ .

Bài toán 51. Cho  $\widehat{xOy}$ . Trên hai cạnh Ox và Oy lấy lần lượt các điểm A và B sao cho  $OA + OB = 2a$ . Xác định vị trí của A và B để cho AB đạt min.

Bài toán 52. Cho đoạn thẳng  $MN = 4\text{cm}$ , điểm O nằm giữa M và N. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ MN vẽ các tam giác cân đỉnh O là OMA và OMB sao cho góc ở đỉnh O bằng  $45^\circ$ . Tìm vị trí của O để AB min. Tính độ dài nhỏ nhất đó.

Bài toán 53. Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $\hat{A} = 100^\circ$ , tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh rằng  $BC = BD + AD$ .

Bài toán 54. Cho  $\triangle ABC$  vuông tại C có  $AC = 3AB$ . Trên AC lấy các điểm D và E sao cho  $AD = DE = EC$ . Chứng minh rằng  $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^\circ$ .

Bài toán 55. Cho tam giác ABC cân tại A,  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $BC = 2\text{cm}$ . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho

$\widehat{CBD} = 60^\circ$ . Tính độ dài AD.

Bài toán 56. Cho tam giác ABC cân tại A,  $\widehat{B} = 75^\circ$ . Kẻ CH vuông góc với AB. Chứng minh rằng  $CH = \frac{AB}{2}$ .

Bài toán 57. Cho tam giác ABC vuông cân tại B và tồn tại một điểm M nằm trong tam giác sao cho  $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$ . Tính  $\widehat{AMB}$ .

Bài toán 58. Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện  $a^2 + b^2 > 5c^2$  thì c là cạnh nhỏ nhất.

Bài toán 59. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên trung tuyến BD lấy E sao cho  $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$ . Chứng minh rằng:  $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$ .

Bài toán 60. Cho  $\triangle ABC$  có  $\widehat{BAC} = 40^\circ$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Gọi D và E là các điểm tương ứng trên AC và AB sao cho  $\widehat{CBD} = 40^\circ$ ;  $\widehat{BCE} = 70^\circ$ . Giả sử BD cắt CE tại F. Chứng minh rằng:  $AF \perp BC$ .

Bài toán 61. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM, phân giác AN. Từ N vẽ đường thẳng vuông góc với AN cắt AB, AM tại hai điểm P và Q. Từ Q vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt AN tại O. Chứng minh rằng  $QO \perp BC$ .

Bài toán 62. Cho  $\triangle ABC$ . Trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại I thỏa mãn  $IB = IC$ . Từ A kẻ  $AH \perp BC$ . Chứng minh rằng  $IM = IH$ .

Bài toán 63. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, G là điểm trên cạnh AB sao cho  $GB = 2GA$ . Các đường thẳng GM và CA cắt nhau tại D. Đường thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K. Gọi P là giao điểm của DE và GK. Chứng minh rằng:

- $DE = BC$
- $PG = PE$ .

Bài toán 64. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Giả sử D là điểm nằm bên trong tam giác sao cho tam giác ABD cân và  $\widehat{ADB} = 150^\circ$ . Trên nửa mặt phẳng không chứa D có bờ là đường thẳng AC lấy điểm E sao cho tam giác ACE đều. Chứng minh 3 điểm B, D, E thẳng hàng.

Bài toán 65. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại J thỏa mãn điều kiện  $JB = JC$ . Từ A kẻ AH vuông góc với cạnh BC. Chứng minh rằng  $JM = JH$ .

Bài toán 66. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM,  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$ , và  $AM = \sqrt{3}\text{cm}$ .

- Tính số đo góc BAC
- Tính BC
- Tính diện tích tam giác ABC.

Bài toán 67. Cho tam giác ABC có góc BAC bằng  $105^\circ$ , đường phân giác trong CD và đường trung tuyến BM cắt nhau tại K thỏa mãn  $KB = KC$ . Gọi H là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC.

- Chứng minh rằng  $HA = HB$
- Tính góc ABC và góc ACB.

Bài toán 68. Cho tam giác ABC cân. Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho  $CD = 2BD$ . So sánh số đo hai góc BAC và  $\frac{1}{2}CAD$ .

Bài toán 69. Gọi P là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC và BE, CF là hai đường cao. Đường thẳng qua A, vuông góc với PE, cắt đường thẳng BE tại N. Gọi K và G lần lượt là trung điểm của BM và CN. Gọi H là giao điểm của đường thẳng KF và GE. CMR:  $AH \perp EF$ .

Bài toán 70. Cho  $\triangle DEF$  vuông tại D, có EK là phân giác. Kẻ  $KM \perp EF$ , kéo dài KM cắt đường thẳng DE tại I. Chứng minh:

a/  $DK = KM$  ;  $DE = EM$ .

b/  $EK \perp IF$ .

c/ Nếu cho M là trung điểm của EF. Chứng minh:  $\frac{DK}{KF} = \frac{1}{2}$ .

----- Hết -----