

BA TUYỆT CHIÊU GIẢI PHƯƠNG TRÌNH-BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC
(Cẩm nang ôn thi đại học!)

Các đề thi đại học những năm gần đây yêu cầu học sinh giải PT có chứa căn thức khá phức tạp, hơn nữa nhiều học sinh quên, yếu, thiếu phần kiến thức phân này. Do vậy tôi trình bày tương đối hệ thống để các bạn lớp 12 ôn lại, các bạn lớp 10 và 11 sớm làm quen và tập dượt, hy vọng từ những định hướng đó các bạn sẽ dễ dàng lĩnh hội kiến thức từ các tài liệu tham khảo và giáo viên trên lớp

❶ Rút gọn+luỹ thừa hai về pt+Đưa thành PT tích

1. $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$

Điều kiện $x \geq -1$

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4x+13)} = -x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ (x+1)(4x+13) = (-x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$

2. **(ĐH D 05)** $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$

ĐS: $x=3$

Biến trong căn thành BP và bỏ khỏi căn được: $2(\sqrt{x+1}+1) - \sqrt{x+1} = 4$

3. $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

ĐK: $x \geq 1$

Bình phương hai vế do không âm... đại thế!

Pt: $x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$

(Do $x \geq 1$ thì hai vế không âm)

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

4. **(ĐH A 04)** $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

ĐS: $x > 10 - \sqrt{34}$

ĐK, quy đồng MS, được: $\sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x$, đây là bài cơ bản

5. **(ĐH A 05)** $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$

ĐS: $[2; 10]$, Bài hai căn, bình phương hai lần

ĐK: $x \geq 2$ Bpt: $5x-1 > 2x-4 + 2\sqrt{2x-4}\sqrt{x-1} + x-1$

$\Leftrightarrow x+2 > \sqrt{(2x-4)(x-1)}$

6. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Bpt: $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} = 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$

ĐK: $x \geq 4; x \leq 1$

TH1: $x \geq 4$; Pt: $\sqrt{(x-2)} + \sqrt{(x-3)} = 2\sqrt{(x-4)}$

(Bình phương... đại thế!)

Vì $\sqrt{(x-2)} > \sqrt{(x-4)}$, $\sqrt{(x-3)} > \sqrt{(x-4)}$,

Nên Pt VN (khôn thế...!)

TH2: $x < 1$: Pt $\sqrt{(2-x)} + \sqrt{(3-x)} = 2\sqrt{(4-x)}$ VN

ĐS: $x=1$

7. **(Dư bi D 06)** $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+2\sqrt{-x^2+8x-7}+1$

ĐS: $x=4; x=5$, đưa thành tích, nhờ phân tích trong căn và nhóm

ĐK: $1 \leq x \leq 7$

Pt: $x-1+2\sqrt{7-x}-2\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)(7-x)}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2)-\sqrt{7-x}(\sqrt{x-1}-2)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x-1}-2)=0$

8. **(ĐH A 10)** $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1$

ĐS: $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

ĐK: $x \geq 0$

Đề ý MS luôn dương vì căn nhỏ hơn 1,

Bpt: $\sqrt{2(x^2-x+1)} \leq -x+\sqrt{x}+1$

Đến đây dùng BĐT BNC $1.(1-x)+1.\sqrt{x} \leq \sqrt{(1+1)[(1-x)^2+(\sqrt{x})^2]}$

hoặc BP và nhóm lại

$(x+\sqrt{x})^2-2(x+\sqrt{x})+1 \leq 0$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1=0$

9. **(ĐH B 10)** $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

ĐS: $x=5$

ĐK: $-1/3 \leq x \leq 6$; Dự đoán nghiệm là 5, ta sẽ tạo ra hai liên hợp ứng với hai căn, sao cho có nhân tử $x-5$, ta làm như sau: $(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+(3x^2-14x-5)=0$ sau khi nhân liên hợp và ra PT tích được một nhân tử luôn dương trên D

$\frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1)=0 \text{ (VN)} \end{cases}$

2 Rút gọn, phân tích rồi đặt ẩn phụ

10. $x^2 + \sqrt{x^2-3x+5} = 3x+7$

Ta đặt $\sqrt{x^2-3x+5} = t$ ($t \geq 0$) ta được $t^2+t-12=0$, ta được $x=-1$ hoặc $x=4$

11. **(ĐH A 02)** Error! Objects cannot be created from editing field codes.

ĐS: $x=5$

ĐK: $4 \leq x$

Đặt $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=t \geq 0 \Rightarrow t^2=2x+2\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}$,

ta được: $t^2-t-12=0 \Leftrightarrow t=-3(l); t=4$

12. **(ĐH NT)** $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

ĐS: $x=1$

Chia TH để xét. Bình phương để kết hợp các bộ nghịch đảo bằng cách đặt $x + \frac{1}{x} = t$

ĐK $\begin{cases} -1/\sqrt{2} \leq x < 0; 0 < x \leq 1/\sqrt{2} \\ 0 < x \leq 2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3} \leq x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 2-\sqrt{3}$

Pt: $4 - (t^2 - 2) + 2\sqrt{5 - 2(t^2 - 2)} = (4 - t)^2, \quad 2 \leq t < 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9 - 2t^2} = t^2 - 4t + 5$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 8t^3 + 28t^2 - 40t + 16 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)[t(t - 3)^2 + 7t - 8] = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x = 1$$

13. $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$

ĐK: $x \geq 5$. $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = 5\sqrt{x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 20}$

Bình phương.

$$2(x^2 - 4x - 5) + 3(x + 4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x + 4)}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 - 4x - 5}{x + 4}}, t \geq 0$. Ta được: $2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = \frac{3}{2}$. Vậy PT có nghiệm

$$x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}, x = 8.$$

14. $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} > 1$: ĐS: $[1; 2], [10; +\infty)$

ĐK: $x \geq 1$

Đặt $\sqrt[3]{2 - x} = t, t \leq 1, \Rightarrow \sqrt{x - 1} = \sqrt{1 - t^3}$

Bpt: $t + \sqrt{1 - t^3} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t(t^2 + t - 2) < 0 \end{cases}$

15. $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$

Đặt $\sqrt{x^2 + 1} = t \quad (t \geq 0)$ ta được phương trình

$$2t^2 - (4x - 1)t + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2x - 1; \quad t = 1/2$$

Từ đó, giải tìm x ta được $x = 4/3$

16. $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$ ĐS: $x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

Từ nhận xét HĐT trong căn, và ẩn bên ngoài căn ta đặt $u = \sqrt{x + 1}; v = \sqrt{x^2 - x + 1}$ sau đó biến đổi hợp lý để thay vào PT.

$$2(x^2 - x + 1 + x + 1) = 5\sqrt{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

ĐK: $x \geq -1$

Pt: $2(u^2 + v^2) = 5uv \Leftrightarrow 2u(u - 2v) - v(u - 2v) = 0$

(Có thể dùng PT bậc hai)

$$\Leftrightarrow u = 2v; v = 2u$$

17. $\sqrt[4]{57 - x} + \sqrt[4]{x + 40} = 5$ ĐS: $x = -24; x = 41$

Đặt ẩn phụ đưa về HPT đối xứng loại 1

ĐK: $-40 \leq x \leq 57$

Đặt: $\sqrt[4]{57 - x} = u \geq 0; \sqrt[4]{x + 40} = v \geq 0$

Ta có:
$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = ((u + v)^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 97 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ 2u^2v^2 - 100uv + 528 = 0 \Leftrightarrow uv = 44(l); uv = 6 \end{cases}$$

18. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$

Đặt $\sqrt[3]{2x - 1} = y \Rightarrow 2x - 1 = y^3 \Rightarrow 2x = y^3 + 1$

Phương trình tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \text{ được } x = 1; \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

⊛ Dùng hàm số + Đánh giá hai vế.

19. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3 - x} - \sqrt{x - 1}$

ĐS: (2; 3]

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t + 2} + \sqrt{t}$

ĐK: $1 \leq x \leq 3$

$$\sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2 + 2} + \sqrt{3-x}$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t + 2} + \sqrt{t}$ có $f'(t) > 0$

$x-1 > 3-x$ hay $x > 2$

20. $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

ĐK: $x \geq 1/2$

$$VT' = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} + \frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}} > 0 \quad \forall x \geq 1/2$$

Nên $x = 1/2$ là nghiệm duy nhất

21. $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x - 1} = 2$

Nhận xét: $VT = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{x-1} \geq 2 \quad \forall x$

Suy ra $VT = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Phương trình có nghiệm $x = 1$

22. $x - 3 + \sqrt{15 - x} \geq \sqrt{2(x^2 - 7x + 24)}$ ĐS: $x = 6$

Đặt: $u = x - 3; v = \sqrt{15 - x}$ và bình phương

ĐK: $x \leq 15$

$u + v \geq \sqrt{2(u^2 + v^2)}$ suy ra: $(u - v)^2 \leq 0$ nên:

$x - 3 = \sqrt{15 - x}$ hay $x = 6$. Thử lại t/m