NHỊ THỨC NEWTON

1. Công thức nhị thức Newton (Niu-tơn)

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n \\ &= C_n^0b^n + C_n^1b^{n-1}a + C_n^2b^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^kb^{n-k}a^k + \ldots + C_n^{n-1}ba^{n-1} + C_n^na^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k \quad (\text{coi } \ a^0 = b^0 = 1).\end{aligned}$$

- Kí hiệu $\sum$ do Leonhard Euler (1707– 1783) đề xuất.
- Công thức nhị thức Newton (còn được gọi là Định lí nhị thức Newton) đã được độc lập chứng minh bởi:
  - Nhà toán học và cơ học Sir Isaac Newton (1643-1727) vào năm 1665;
  - Nhà toán học James Gregory (1638 - 1675) vào năm 1670.

Trong khai triển trên, số hạng tổng quát có dạng $T_{k+1} = C_n^ka^{n-k}b^k$ $(\text{k} = \overline{0,\text{n}})$.

Các hệ số trong khai triển này có thể được xác định theo tam giác Pascal sau đây.

1		1
1 1		1 1
1 2 1		1 2 1
1 3 3 1		1 3 3 1
1 4 6 4 1		1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1		1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1		1 6 15 20 15 6 1
....		....

2. Phương pháp làm trội

Để tính tổng có dạng $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, ta có thể phân tích $u_k = v_k - v_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, và

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}.$$

Để tính tích có dạng $S_n = \prod_{k=1}^{n} u_k \neq 0,$ ta có thể phân tích $u_k = \frac{v_k}{v_{k+1}}, k = 1, 2, ..., n,$ và $S_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{v_k}{v_{k+1}} = \frac{v_1}{v_{n+1}}.$

3. Tổng các hệ số của đa thức

Ta xét đa thức bậc n $(n \in \mathbb{N}^*)$ với hệ số thực $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ $(a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R};\ a_n \neq 0)$.

- Số hạng tự do (số hạng không chứa x) của $f(x)$ là $a_0 = f(0)$.
- Tổng tất cả các hệ số của $f(x)$ là $S = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = f(1).$
- Tổng tất cả các hệ số bậc chẵn của $f(x)$ là $S_1 = a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2\left[\frac{n}{2}\right]} = \frac{1}{2}\left(f(1) + f(-1)\right).$
- Tổng tất cả các hệ số bậc lẻ của $f(x)$ là $S_2 = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} = \frac{1}{2}\left(f(1) - f(-1)\right).$

4. Hệ quả của công thức nhị thức Newton

1) $\left(a-b\right)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 - ... + (-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k + ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k a^{n-k}b^k \quad (\text{coi} \quad a^0 = b^0 = 1).$$

2) $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n x^n.$

3) $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ... + (-1)^k C_n^k x^k + ... + (-1)^n C_n^n x^n.$

4) $(1+x)^n \geq C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k; \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k, \forall x \geq 0.$

5) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n.$

6) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^k C_n^k + ... + (-1)^n C_n^n = 0.$

7) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} = 2^{n-1}.$

8) $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^{n-1} + C_{2n+1}^n = 4^n \quad (\text{do } C_{2n+1}^{2n+1-k} = C_{2n+1}^k, \forall k = 0,1,...,n).$

5. Một số bài tập

5.1. Viết dạng khai triển của đa thức

Bài 1. Viết dạng khai triển của đa thức

a) $\left(a-3b\right)^4.$ b) $(\frac{2}{x} - \sqrt{x})^5, x > 0.$ c) $(2x+1)^8.$

Bài 2.

a) Tìm số hạng thứ 8 trong khai triển $(1-2x)^{12}$ viết theo thứ tự lũy thừa tăng dần của x.

b) Tìm hệ số của số hạng thứ 5 trong khai triển $\left(\frac{x}{3} - 1\right)^{20}$ viết theo thứ tự lũy thừa giảm dần của x.

5.2. Xác định hệ số, xác định số hạng trong khai triển đa thức

Bài 3.

a) Tìm hế số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $(x-2)^{15}$.

b) Tìm số hạng tự do trong khai triển $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^8$.

c) Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(2x-1)^3+(2x-1)^4+...+(2x-1)^{10}$.

d) Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $(1-2x)(x+3)^{13}$.

e) Tìm hệ số của số hạng chứa $x^5y^2z^3$ trong khai triển $(x-2y-z)^{10}$.

f) Xác định hệ số có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, biết rằng

$a_0+\frac{a_1}{2}+...+\frac{a_n}{2^n}=4096$.

<u>Bài 4.</u>

a) Biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1-3x)^n$ là 90. Tìm số nguyên dương n.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$.

c) Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $(2+x)^n$ biết $3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^{n-1}+3^{n-2}C_n^{n-2}+...+(-1)^nC_n^n=2048$.

d) Tìm số nguyên dương n biết hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} trong khai triển $(x^2+1)^n(x+2)^n$ là $26n$.

e) Cho khai triển $\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{\frac{-x}{3}}\right)^n=C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n+C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)+...+C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$.

Tìm số thực x và số nguyên dương n biết trong khai triển đó số hạng thứ 4 bằng $20n$ và $C_n^3=5C_n^1$.

Bài 5. Khai triển $f(x)=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+x^2\right)^n, x>0,$ thành đa thức, biết rằng tổng tất cả các hệ só của $f(x)$ là 3 486 784 401. Hãy xác định

a) Số hạng tự do (số hạng không phụ thuộc vào x) trong $f(x)$.

b) Số hạng chứa x^{10} trong $f(x)$.

c) Hệ số có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong $f(x)$.

Bài 6. a) Tìm số hạng chứa $x^{29}y^8$ trong khai triển $(x^3-xy)^{15}$.

b) Tìm số hạng có hệ số lớn nhất và nhỏ nhất trong khai triển $(2x+1)^{19}$.

c) Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(1-3x)^n$ biết rằng $A_n^2+C_n^2=315$.

d) Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong $f(x)=x^3\left(2x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{5n-2}+\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{3n+3}, x>0,$ biết rằng $A_n^2C_n^{n-1}=48$.

e) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, $x\neq 0,$ biết rằng

$$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1.$$

f) Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{10}y^7z^3$ trong khai triển $\left(x-2y+3z\right)^{20}$.

g) Tìm hệ số của x^5 trong khai trong khai triển $f(x)=(2x+1)^4+(x-1)(x-2)^5+(2x^2-1)(x+3)^6$.

Tính tổng tất cả các hệ số tương ứng với x bậc lẻ trong $f(x)$.

h) Tìm số hạng có hệ số lớn nhất và số hạng có hệ số nhỏ nhất trong khai triển $f(x)=(3-2x)^n$, biết tổng tất cả các hệ số của những số hạng bậc chẵn (gồm cả số hạng tự do) trong $f(x)$ là 4882813.

i) Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(1+x^2(1-x)\right)^8$.

Bài 7. Tính giá trị của biểu thức

$$T_1 = C_{2015}^1 + C_{2015}^3 + C_{2015}^5 ... + C_{2015}^{2015};$$
$$T_2 = C_{2015}^0 + C_{2015}^2 + C_{2015}^4 + ... + C_{2015}^{2014};$$
$$T_3 = C_{2015}^0 + C_{2015}^1 + C_{2015}^2 + ... + C_{2015}^{1006} + C_{2015}^{1007};$$
$$T_4 = \frac{1}{0!}A_n^1 + \frac{2}{1}A_n^2 + \frac{3}{2!}A_n^3 + ... + \frac{n}{(n-1)!}A_n^n, \quad n \in \mathbb{N}*;$$
$$T_5 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k.2^k}{k+1}C_n^k, \ n \in \mathbb{N}*.$$

Bài 8. Rút gọn biểu thức

$$S_1 = C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - C_{4n}^6 + ... - C_{4n}^{4n-2} + C_{4n}^{4n},$$
$$S_2 = C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - C_{4n}^7 + ... + C_{4n}^{4n-3} - C_{4n}^{4n-1},$$
$$S_3 = C_{2015}^0 - C_{2015}^2 + C_{2015}^4 - C_{2015}^6 + ... + C_{2015}^{2012} - C_{2015}^{2014},$$
$$S_4 = C_{2015}^1 - C_{2015}^3 + C_{2015}^5 - C_{2015}^7 + ... + C_{2015}^{2013} - C_{2015}^{2015},$$
$$S_5 = C_{2015}^0 + C_{2015}^4 + C_{2015}^8 + ... + C_{2015}^{2012};$$
$$S_6 = C_{50}^0 - 3C_{50}^2 + 3^2C_{50}^4 - ... + 3^{24}C_{50}^{48} - 3^{25}C_{50}^{50}.$$

Bài 9. Cho $T = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^nC_n^n, n \in \mathbb{N}*$.

a) Rút gọn T.

b) Tìm số nguyên dương n sao cho $T = 243$.

c) Tìm số nguyên dương n sao cho $T = 252$.

Bài 10. Chứng minh bất đẳng thức $2^n + 3^n + 4^n \geq 7n^2 - n + 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài 11. Giải phương trình trên tập số nguyên dương

a) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = 6144.$

b) $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + ... + n(n-1).C_n^n = 1344.$

c) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + ... + C_{2n}^{2n-2}.3^{2n-2} + C_{2n}^{2n}.3^{2n} = 2147516416.$