

Ôn Tập
Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng

Phương pháp:

- *Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng α và β
- *Tìm đường thẳng $a \subset \alpha$ và đường thẳng $b \subset \beta$ sao cho $a \cap b = I$ thì I là điểm chung của α và β

1. Cho 4 điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng
 - a) Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD chéo nhau
 - b) Trên các đoạn AB và AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BD tại I. Hãy xét xem điểm I thuộc những mặt phẳng nào? Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (BCD)
2. Trong mặt phẳng α cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O. Gọi c là một đường thẳng cắt α tại điểm I khác O
 - a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (O, c) và α
 - b) Gọi M là một điểm trên c khác I. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b). Chứng minh rằng giao tuyến này luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên c
3. Cho hai mặt phẳng α và β cắt nhau theo giao tuyến d. Ta lấy hai điểm A, B thuộc mặt phẳng α nhưng không thuộc d và một điểm O nằm ngoài α và β

Các đường thẳng OA, OB lần lượt cắt β tại A' và B'. Giả sử đường thẳng AB cắt d tại C

 - a) Chứng minh rằng ba điểm O, A, B không thẳng hàng
 - b) Chứng minh rằng ba điểm A', B', C thẳng hàng và từ đó suy ra ba đường thẳng AB, A'B' và d đồng qui
4. Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không //BC, MP không //AD.

Tìm các giao tuyến sau:

a) $(MNP) \cap (ABC)$	b) $(MNP) \cap (ABD)$
c) $(MNP) \cap (BCD)$	d) $(MNP) \cap (ACD)$
5. Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không //BC, trong tam giác BCD lấy điểm I. Tìm các giao tuyến sau:

a) $(MNI) \cap (ABC)$	b) $(MNI) \cap (BCD)$
c) $(MNI) \cap (ABD)$	d) $(MNI) \cap (ACD)$
6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy không phải hình thang. Tìm các giao tuyến sau:

a) $(SAC) \cap (SBD)$	
b) $(SAB) \cap (SCD)$	c) $(SAD) \cap (SBC)$

7. Cho tứ diện ABCD. Trong 2 tam giác ABC và BCD lấy 2 điểm M, N. Tìm các giao tuyến sau:

a) $(BMN) \cap (ACD)$	b) $(CMN) \cap (ABD)$	c) $(DMN) \cap (ABC)$
-----------------------	-----------------------	-----------------------
8. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm I, trong 2 tam giác BCD và ACD lần lượt lấy 2 điểm J, K. Tìm các giao tuyến sau:

a) $(ABJ) \cap (ACD)$	b) $(IJK) \cap (ACD)$
c) $(IJK) \cap (ABD)$	d) $(IJK) \cap (ABC)$
9. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm của AD và BC
 - a) Chứng minh rằng IB và JA là 2 đường thẳng chéo nhau
 - b) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng $(IBC) \cap (JAD)$
 - c) Gọi M là điểm nằm trên đoạn AB; N là điểm nằm trên đoạn AC. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng $(IBC) \cap (DMN)$
10. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và một điểm O nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Gọi A', B', C' là các điểm lần lượt nằm trên các đường thẳng OA, BO, OC. Giả sử $A'B' \cap AB = D$, $B'C' \cap BC = E$, $C'A' \cap CA = F$.

Chứng minh rằng 3 điểm D, E, F thẳng hàng
11. Cho tứ diện ABCD. Gọi I là điểm nằm trên đường thẳng BD nhưng ngoài đoạn BD. Trong mặt phẳng (ABD) ta vẽ một đường thẳng qua I cắt hai đoạn AB và AD lần lượt tại K và L. Trong mặt phẳng (BCD) ta vẽ một đường thẳng qua I cắt hai đoạn CB và CD lần lượt tại M và N
 - a) Chứng minh rằng 4 điểm K, L, M, N cùng thuộc một mặt phẳng
 - b) Gọi $O_1 = BN \cap DM$; $O_2 = BL \cap DK$ và $J = LM \cap KN$. Chứng minh rằng ba điểm A, J, O_1 thẳng hàng và ba điểm C, J, O_2 cũng thẳng hàng
 - c) Giả sử hai đường thẳng KM và LN cắt nhau tại H, chứng minh rằng điểm H nằm trên đường thẳng AC
12. Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC
 - a) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và BB' cùng nằm trong một mặt phẳng
 - b) Gọi I là giao điểm của AA' và BB', chứng minh rằng: $\frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB} = \frac{1}{3}$
 - c) Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng qui
13. Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn luôn đi qua MN, cắt CD và BD lần lượt tại E và F
 - a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn luôn đi qua một điểm cố định
 - b) Tìm quỹ tích giao điểm I của ME và NF
 - c) Tìm quỹ tích giao điểm J của MF và NE

14. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, AC, AD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$. Gọi I = MN ∩ BC và J = MP ∩ BD

- a) Chứng minh rằng các đường thẳng MG, PI, NJ đồng phẳng
- b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của CD và NI; H = MG ∩ BE ; K = GF ∩ mp(BCD), chứng minh rằng các điểm H, K, I, J thẳng hàng

Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng α

Bước 1: Chọn một mặt phẳng β chứa a (β gọi là mặt phẳng phụ)

Bước 2: Tìm giao tuyến của α và β là đường thẳng d

Bước 3: Gọi M là giao điểm của a với d thì M là giao điểm của a với α

1. Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AC, BC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, K. Tìm các giao điểm sau:

- a) $CD \cap (MNK)$ b) $AD \cap (MNK)$

2. Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, N, P. Tìm các giao điểm sau:

- a) $MN \cap (ADP)$ b) $BC \cap (DMN)$

3. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M, trong tam giác BCD lấy điểm N. Tìm các giao điểm sau:

- a) $BC \cap (DMN)$ b) $AC \cap (DMN)$ c) $MN \cap (ACD)$

4. Cho hình chóp S.ABCD. Trong tứ giác ABCD lấy một điểm O, tìm giao điểm của AM với các mặt phẳng (SBC), (SCD)

5. Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB, AC lấy 2 điểm M, N; trong tam giác BCD lấy điểm P. Tìm các giao điểm sau:

- a) $MP \cap (ACD)$ b) $AD \cap (MNP)$ c) $BD \cap (MNP)$

6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy không phải hình thang. Trên cạnh SC lấy một điểm E

- a) Tìm giao điểm F của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABE)
 - b) Chứng minh rằng 3 đường thẳng AB, CD và EF đồng qui
5. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M, trong 2 tam giác BCD và ACD lần lượt lấy 2 điểm N, K. Tìm các giao tuyến sau:

- a) $CD \cap (ABK)$ b) $MK \cap (BCD)$
- c) $CD \cap (MNK)$ d) $AD \cap (MNK)$

7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M, N và B

- a) Tìm các giao tuyến (P) ∩ (SAB) và (P) ∩ (SBC)
- b) Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với mặt phẳng (P) và giao điểm K của đường thẳng SD với mặt phẳng (P)
- c) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SDC)

d) Xác định các giao điểm E, F của các đường thẳng DA, DC với (P). Chứng minh rằng E, B, F thẳng hàng

8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và SC

a) Xác định I = AN ∩ (SBD) và J = MN ∩ (SBD)

b) Tính các tỉ số $\frac{IA}{IN}$; $\frac{JM}{JN}$ và $\frac{IB}{IJ}$

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang đáy lớn AB. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SB và SC

- a) Xác định giao tuyến (SAD) ∩ (SBC)
- b) Tìm giao điểm của SD với mặt phẳng (AIJ)
- c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AIJ)

10. Cho tứ diện ABCD. Trong 2 tam giác ABC và BCD lấy 2 điểm I, J. Tìm các giao điểm sau: a) $IJ \cap (SBC)$ b) $IJ \cap (SAC)$

7. Cho tứ diện ABCD, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD ta lấy điểm P sao cho BP = 2PD. Tìm giao điểm của:

- a) CD với mặt phẳng (MNP) b) AD với mặt phẳng (MNP)

11. Cho tứ diện SABC. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của SA và AB. Trên đoạn SC ta lấy điểm K sao cho CK = 3KS

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (IHK)
- b) Gọi M là trung điểm IH. Tìm giao điểm của KM với mặt phẳng (ABC)

9. Cho hình chóp S.ABCD sao cho ABCD không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy một điểm M

- a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB)
- b) Chứng minh rằng ba đường thẳng AB, CD, MN đồng qui

12. Cho 2 hình thang ABCD và ABFE có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong 1 mặt phẳng

a) Xác định các giao tuyến sau :

$(AEC) \cap (BFD)$; $(BCE) \cap (AFD)$

b) Lấy 1 điểm M trên đoạn DF. Tìm giao điểm $AM \cap (BCE)$

13. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD, ta lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$
- Tìm giao điểm E của đường thẳng CD với mặt phẳng (IJK). Chứng minh rằng $DE = DC$
 - Tìm giao điểm F của đường thẳng AD với mặt phẳng (IJK). Chứng minh rằng $FA = 2FD$
 - Chứng minh rằng FK song song IJ
 - Gọi M và N là hai điểm bất kỳ lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (IJK)
14. Cho tứ diện SABC. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các cạnh SA, SB, SC sao cho $SA' = \frac{1}{3} SA$; $SB' = \frac{1}{2} SB$; $SC' = \frac{1}{2} SC$
- Tìm giao điểm E, F của các đường thẳng A'B' và A'C' lần lượt với mặt phẳng (ABC)
 - Gọi I và J lần lượt là các điểm đối xứng của A' qua B' và C'. Chứng minh rằng $IJ = BC$ và $BI = CJ$
 - Chứng minh rằng BC là đường trung bình của tam giác AEF
- 15*. Trong mặt phẳng α cho tam giác đều ABC. Gọi β là mặt phẳng cắt α theo giao tuyến BC. Trong mặt phẳng β ta vẽ hai nửa đường thẳng Bx và Cy song song với nhau và nằm cùng một phía với α . Trên Bx và Cy ta lấy B' và C' sao cho $BB' = 2CC'$
- Tìm giao điểm D của đường thẳng BC với mặt phẳng (AB'C') và tìm giao tuyến của mặt phẳng (AB'C') với mặt phẳng α
 - Trên đoạn AC' ta lấy điểm M sao cho $AM = \frac{2}{3} AC'$. Tìm giao điểm I của đường thẳng B'M với mặt phẳng α và chứng minh I là trung điểm của AD
 - Chứng minh rằng nếu B' và C' theo thứ tự chạy trên Bx và Cy sao cho $BB' = 2CC'$ thì mặt phẳng (AB'C') luôn luôn cắt α theo một giao tuyến cố định
 - Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Cạnh AC cắt DE tại G. Hãy tính tỉ số $\frac{AG}{AC}$ và chứng minh rằng $AD = 2AF$
16. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại A', B', C'
- Dựng giao điểm D' của mặt phẳng (P) với cạnh SD
 - Gọi I là giao điểm của A'C' với SO. Chứng minh rằng :

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2\frac{SO}{SI}$$

c) Chứng minh rằng: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$

Dựng thiết diện với hình chóp

Thiết diện của một hình chóp với mặt phẳng α là phần chung của hình chóp với mặt phẳng α

Phương pháp: để dựng thiết diện của một hình chóp với mặt phẳng α ta lần lượt làm như sau

- Bước 1: Dựng giao tuyến của α với một mặt nào đó của hình chóp
 Bước 2: Giới hạn đoạn giao tuyến là phần của giao tuyến nằm trong mặt đang xét của hình chóp

Tiếp tục hai bước trên với mặt khác của hình chóp cho đến khi các đoạn giao tuyến khép kín tạo thành một đa giác, đa giác ấy là thiết diện

- Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh BC, CD, AD lấy các điểm M, N, P. Dựng thiết diện của ABCD với mặt phẳng (MNP)
- Cho hình chóp S.ABCD Trên cạnh SD lấy điểm M. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (BCM)
- Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB, AC lấy 2 điểm M, N; trong tam giác BCD lấy điểm I. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI)
- Cho hình chóp S.ABCD trên các cạnh SA, AB, BC lấy các điểm M, N, P. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)
- Cho hình chóp S.ABCD trên các cạnh SA, SB, SC lấy các điểm M, N, P.
 - Tìm giao điểm $MN \cap (ABCD)$
 - Tìm giao điểm $NP \cap (ABCD)$
 - Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)
- Cho tứ diện ABCD. Trong 3 tam giác ABC, ACD và BCD lần lượt lấy 3 điểm M, N, P.
 - Tìm giao điểm $MN \cap (BCD)$
 - Dựng thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MNP)
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD đáy lớn AB. Gọi M, N là trung điểm của SB và SC.
 - Tìm giao tuyến (SAD) \cap (SBC)
 - Tìm giao điểm SD \cap (AMN)
 - Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN)
- Cho hình chóp S.ABCD. Trong tam giác SCD ta lấy điểm M
 - Tìm giao tuyến (SBM) \cap (SAC)

b) Tìm giao điểm của $BM \cap (SAC)$

c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ABM)

10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD với AB là đáy lớn. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN)

c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN)

11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi H và K lần lượt là trung điểm các cạnh CB và CD, M là điểm bất kỳ trên cạnh SA. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MHK)

12*. Cho hình chóp S.ABCD có đáy lớn $AD = 2BC$. Gọi N là trung điểm của SB, M nằm trên cạnh SA sao cho $AM = 2MS$. Gọi α là mặt phẳng thay đổi qua MN cắt BC và AD tại P và Q

a) Chứng minh rằng 4 đường thẳng MN, AB, CD và PQ đồng quy tại một điểm I

b) Gọi J và K lần lượt là giao điểm của SC và SD với α , chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng

c) Tìm $\alpha \cap (SAC)$ và $\alpha \cap (SBD)$

d) Gọi $R = MQ \cap NP$, Chứng minh rằng điểm R chạy trên một đường thẳng cố định khi α thay đổi

. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AD, J là điểm đối xứng với D qua C, K là điểm đối xứng với D qua B

a) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK)

b) Tính diện tích của thiết diện ấy

Đường thẳng song song đường thẳng

Định nghĩa: hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung

Định lý 1: Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song với nhau: $a // c \ \& \ b // c \Rightarrow a // b$

Chú ý: Khi hai đường thẳng a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta có thể sử dụng các định lý đã học để chứng minh chúng song song với nhau:

* hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì // với nhau

* Dùng định lý Talet: Một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác thì chắn trên hai cạnh kia những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ

Định lý 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt có chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai

đường thẳng ấy

$$\begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ a \subset \alpha, b \subset \beta \Rightarrow d // a, b \\ a // b \end{cases}$$

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng IJKL là hình bình hành

2. Cho tứ diện ABCD. Gọi H, K là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD. Chứng minh rằng $HK // AB$

3. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm trên các cạnh BC, SC, SD, DA sao cho $MN // BS$, $NP // CD$, $MQ // CD$. Chứng minh rằng $PQ // SA$

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, và SD

a) Chứng minh rằng $ME // AC$, $NF // BD$

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng ME, NF, và SO (O là giao điểm của AC và BD) đồng quy

c) Chứng minh rằng 4 điểm M, N, E, F đồng phẳng

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, và SDA. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng

b) Tứ giác MNEF là hình thoi

c) Ba đường thẳng ME, NF và SO đồng quy (O là giao điểm của AC và BD)

5. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đoạn AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho:

$AM = kAC$ và $BN = kBF$ ($0 < k < 1$)

a) Giả sử $k = 1/3$; chứng minh rằng $MN // DE$

b) Giả sử $MN // DE$ hãy tính k

6. Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AC, BC, AD lấy 3 điểm M, N, P. Dựng giao tuyến $(MNP) \cap (BCD)$ trong các trường hợp sau:

a) PM cắt CD b) PM // CD

8. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB. Gọi M, N là trung điểm của SA và SC

a) Dựng các giao tuyến $(SAB) \cap (SCD)$, $(DMN) \cap (ABCD)$

b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (DMN)

9. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm AB, AD. Điểm M thay đổi trên cạnh BC

- a) Tìm giao điểm N của CD và (IJM)
- b) Gọi H là giao điểm của IM và JN ; K là giao điểm của IN và JM. Tìm tập hợp các điểm H; K khi M thay đổi trên cạnh BC

10. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AD. Điểm M thay đổi trên cạnh SA

- a) Dựng giao điểm N của SD và mặt phẳng(BCM)
- b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng(BCM)
- c) Gọi $I = BM \cap CN$. Tìm tập hợp điểm I khi M chạy trên SA

11. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi H, K là trung điểm SA, SB

- a) Chứng minh rằng $HK // CD$
- b) Trên cạnh SC lấy điểm M. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng(MKH)

12. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành, điểm M thay đổi trên cạnh SD

- a) Dựng giao tuyến (SAD) \cap (SBC)
- b) Dựng giao điểm N của SC và mặt phẳng(ABM); ABMN là hình gì? Có thể là hình bình hành không?
- c) Gọi I là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng khi M chạy trên cạnh SD thì I chạy trên 1 đường thẳng cố định

. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABC. Dựng thiết diện của ABCD với mặt phẳng (IJK)

13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

- a) Tìm giao điểm I của AM với (SBD). Chứng minh $IA = 2IM$
- b) Tìm giao điểm F của SD với (ABM). Chứng minh rằng F là trung điểm của SD và ABMF là một hình thang
- c) Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng(SBD)

14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là trung điểm của SC và N là trung điểm của OB

a) Tìm giao điểm I của SD với mặt phẳng (AMN)

b) Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$

15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và SAD. E là trung điểm của BC

- a) Chứng minh rằng $MN // BD$
- b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE)

c) Gọi H và K lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng (MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh rằng $LH // BD$

Đường thẳng song song mặt phẳng

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm của BC và CD

- a) Chứng minh rằng $BD // (AIJ)$
- b) Gọi H, K là trọng tâm của các tam giác ABC và ACD. Chứng minh rằng $HK // (ABD)$

2. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. G là trọng tâm của tam giác SAB và E là điểm trên cạnh AD sao cho $DE = 2EA$. Chứng minh rằng $GE // (SCD)$

3. Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng.

- a) Gọi M, N là trung điểm của AD, BE. Chứng minh rằng $MN // (CDE)$
- b) Trên các đoạn AC và BF lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AM = kAC$; $BN = kBF$ ($0 < k < 1$). Chứng minh rằng $MN // (CDEF)$

5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M,

N là trung điểm của AB và AD. Mặt phẳng α chứa MN và //SA

- a) Dựng giao điểm của SC và α
- b) Dựng thiết diện của hình chóp với α

6. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M. Gọi α là mặt phẳng qua M và // 2 cạnh AC, BD. Dựng thiết diện của tứ diện với α

7. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành, M là 1 điểm thay đổi trên cạnh AB. Mặt phẳng α qua M và //SA và AD

- a) Dựng thiết diện của α với hình chóp. Chứng minh thiết diện là hình thang
- b) Chứng minh rằng đoạn giao tuyến của α với (SCD) thì //SD
- c) Tìm quỹ tích giao điểm 2 cạnh bên của thiết diện khi M thay đổi trên cạnh SD

8. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB.

Điểm M thay đổi trên cạnh BC, mặt phẳng α qua M và //AB và SC

- a) Dựng giao tuyến (SAD) \cap (SBC)
- b) Dựng thiết diện của hình chóp với α
- c) Chứng minh rằng đoạn giao tuyến của α với (SAD) thì //SD

9. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M, N là trung điểm SA, SB. Điểm P thay đổi trên cạnh BC

- a) Chứng minh rằng $CD // (MNP)$
- b) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Chứng minh rằng thiết diện là 1 hình thang.

c) Gọi I là giao điểm 2 cạnh bên của thiết diện, tìm quỹ tích điểm I

10. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB.

Điểm M thay đổi trên cạnh SA

a) Tìm các giao tuyến $(SAD) \cap (SBC)$; $(SAB) \cap (SCD)$

b) Dựng giao điểm $N = SB \cap (CDM)$

c) Gọi $I = CM \cap DN$; $J = DM \cap CN$. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh SA thì I, J chạy trên 2 đường thẳng cố định

11. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = CD = a$ và AB vuông góc CD. Lấy 1 điểm M trên cạnh AC, đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng α đi qua M và song song với AB và CD cắt BC, BD, AD lần lượt tại N, P, Q

a) Chứng minh rằng MNPQ là 1 hình chữ nhật

b) Tính diện tích MNPQ theo a và x

c) Xác định x để diện tích MNPQ là lớn nhất

12. Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc CD, tam giác BCD vuông tại C và góc $BDC = 30^\circ$; M là 1 điểm thay đổi trên cạnh BD;

$AB = BD = a$; đặt $BM = x$. Mặt phẳng α qua M và song song với AB, CD

a) Dựng thiết diện của tứ diện với α

b) Tính diện tích S của thiết diện

c) Xác định vị trí của M trên BD để S lớn nhất

13. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy một điểm M, đặt $AM = x$ ($0 < x < a$) Mặt phẳng α qua M, song song AC và SB lần lượt cắt BC, SC, SA tại N, P, Q

a) MNPQ là hình gì?

b) Tính diện tích MNPQ. Xác định x để diện tích ấy lớn nhất

14. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh a, SAB là tam giác vuông tại A với $SA = a$. Gọi M là một điểm thay đổi trên cạnh AD, đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi α là mặt phẳng qua M và song song CD và SA

a) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α , thiết diện là hình gì

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x

15. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là nửa lục giác đều ABCD đáy lớn $AB = 2a$, hai cạnh bên AD và BC cắt nhau tại I. Tam giác SAB cân tại S và $SI = 2a$. Trên đoạn AI ta lấy một điểm M, đặt $AM = x$ ($0 < x < 2a$). Mặt phẳng α qua M song song SI và AB lần lượt cắt BI, SB, SA tại N, P, Q

a) Tính góc giữa SI và AB

b) MNPQ là hình gì?

c) Tính diện tích MNPQ theo a và x. Tìm x để diện tích ấy lớn nhất. Khi đó MNPQ là hình gì

d) Gọi $K = MP \cap NQ$. Tìm quỹ tích điểm K khi M chạy trên đoạn AI

16*. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M và N là trung điểm của AB và SC

a) Tìm các giao tuyến $(SAC) \cap (SBD)$ và $(SAB) \cap (SCD)$

b) Chứng minh rằng $MN \parallel (SAD)$

c) Chứng minh rằng đường thẳng AN đi qua trọng tâm của tam giác SBD

d) Gọi P là trung điểm của SA. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)

17*. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M và N là trung điểm của SA và SC

a) Tìm các giao tuyến $(SAC) \cap (SBD)$ và $(BMN) \cap (ABCD)$; $(BMN) \cap (SBD)$

b) Tìm giao điểm K của SD và (BMN). Chứng minh rằng $SK = \frac{1}{3} SD$

c) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (BMN)

d) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng $MI \parallel (SBC)$ và $(IJN) \parallel (SAD)$

Mặt phẳng song song mặt phẳng

1. Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau.

a) Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$

b) Gọi I, J, K là trung điểm của các cạnh AB, CD, EF.

Chứng minh rằng $(DIK) \parallel (JBE)$

2. Cho tứ diện ABCD. Gọi H, K, L là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD. Chứng minh rằng $(HKL) \parallel (BCD)$

3. Cho 2 tam giác ABC và DEF nằm trên 2 mặt phẳng α, β song song với nhau

a) Dựng các giao tuyến $\alpha \cap (AEF)$; $\beta \cap (BCD)$

b) Dựng giao tuyến $(AEF) \cap (BCD)$

4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AD. M là 1 điểm nằm trên cạnh AB, mặt phẳng α qua M và $\alpha \parallel (SBC)$. Dựng thiết diện của hình chóp với α . Thiết diện là hình gì?

5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Điểm M thay đổi trên cạnh BC, mặt phẳng α qua M và \parallel mặt phẳng (SAB)

a) Dựng thiết diện của hình chóp với α , chứng minh thiết diện là hình thang

b) Chứng minh rằng $CD \parallel \alpha$

c) Tìm quỹ tích giao điểm 2 cạnh bên của thiết diện

6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AD = CD = a$; $AB = 2a$, tam giác SAB vuông cân tại A. Trên cạnh AD lấy điểm M. Đặt $AM = x$. Mặt phẳng α qua M và // (SAB)
- Dựng thiết diện của hình chóp với α
 - Tính diện tích và chu vi thiết diện theo a và x
7. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'
- Chứng minh rằng $(BA'C') // (ACD')$
 - Tìm các giao điểm $I = B'D \cap (BA'C')$; $J = B'D \cap (ACD')$
Chứng minh rằng 2 điểm I, J chia đoạn B'D thành 3 phần bằng nhau
 - Gọi M, N là trung điểm của C'B' và D'D. Dựng thiết diện của hình hộp với mặt phẳng (BMN)
8. Trong mặt phẳng α cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về cùng 1 phía với α . Một mặt phẳng β cắt 4 nửa đường thẳng ấy lần lượt tại A', B', C', D'
- Chứng minh rằng $mp(AA', BB') // mp(CC', DD')$
 - Chứng minh rằng tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành
 - Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$
9. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B'C'
- Chứng minh rằng $AI // A'I'$
 - Tìm giao điểm $IA' \cap (AB'C')$
 - Tìm giao tuyến của $(AB'C') \cap (BA'C')$
10. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, A'B'C' và ACC'. Chứng minh rằng:
- $(IKG) // (BB'C'C)$
 - $(A'KG) // (AIB')$
10. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm A'B'
- Chứng minh rằng $CB' // (AHC')$
 - Tìm giao tuyến $d = (AB'C') \cap (A'BC)$.
Chứng minh rằng $d // (BB'C'C)$
11. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và AC
- Dựng thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNB')
 - Gọi P là trung điểm B'C'. Dựng thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP)
11. Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là tâm của các mặt bên AA'C'C và BB'D'D. Chứng minh rằng $MN // (ABCD)$
12. Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình bình hành với $AB = a$,

- $AD = 2a$. Mặt bên SAB là 1 tam giác vuông cân tại A. Trên cạnh AD ta lấy 1 điểm M, đặt $AM = x$. Mặt phẳng α qua M và // mặt phẳng (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q ($0 < x < 2a$)
- Chứng minh rằng MNPQ là hình thang vuông
 - Tính diện tích MNPQ theo a và x
 - Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M chạy trên cạnh AD
13. Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình bình hành
Gọi I là trung điểm của SD
- Xác định giao điểm $K = BI \cap (SAC)$
 - Trên IC lấy điểm H sao cho $HC = 2HI$.
Chứng minh $KH // (SAD)$
 - Gọi N là điểm trên SI sao cho $SN = 2NI$.
Chứng minh $(KHN) // (SBC)$
 - Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (KHN)
14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SC, AB, AD
- Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (SBC) và (SAD)
 - Tìm giao điểm I của $AM \cap (SBD)$
 - Gọi $J = BP \cap AC$. Chứng minh rằng $IJ // (SAB)$
 - Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)

Hình chóp

1. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông tại B, góc $C = 60^\circ$, $BC = a$.
- Chứng minh rằng 4 mặt của hình chóp là tam giác vuông. Tính S_{tp}
 - Tính thể tích $V_{S.ABC}$
 - Từ A kẻ $AH \perp SB$, $AK \perp SC$. Chứng minh rằng $SC \perp (AHK)$ và ΔAHK vuông
 - Tính thể tích $V_{S.AHK}$
2. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a. Đường cao $SA = a$, M là trung điểm của SB
- Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là tam giác vuông. Tính diện tích toàn phần hình chóp S.ABCD
 - Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ADM). Tính diện tích thiết diện
 - Thiết diện chia hình chóp làm hai hình đa diện, tính thể tích các khối đa diện ấy

3. Cho hình chóp S.ABC có đáy và mặt bên SAB là các tam giác đều cạnh a. Chân đường cao SH của hình chóp đối xứng với tâm O của đáy qua cạnh AB

- a) Chứng minh rằng các mặt bên SAC và SBC là các tam giác vuông
- b) Tính diện tích toàn phần của hình chóp S.ABC
- c) Tính góc giữa các mặt bên và đáy
- d) Tính thể tích $V_{S.ABC}$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB)

4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SC = a$. Cạnh AC và SC lần lượt tạo với đáy các góc $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$

- a) Xác định các góc α, β
- b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp S.ABCD

5. Cho hình chóp S.ABC có $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác SAB đều và tam giác ABC vuông tại C, góc $BAC = 30^\circ$

- a) Tính chiều cao hình chóp
- b) Tính thể tích hình chóp

6. Trên 3 nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz vuông góc nhau từng đôi một ta lần lượt lấy 3 điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC = a$

- a) Chứng minh rằng OABC là hình chóp đều
- b) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp OABC

7. Hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và B.

$AD = 2a, AB = BC = a$; $SA \perp (ABCD)$; cạnh SC tạo với đáy (ABCD) một góc $\varphi = 60^\circ$

- a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông. Tính diện tích toàn phần
- b) Tính thể tích S.ABCD
- c) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB)

8. Cho tứ diện SABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B, $AB = 2a$,

$BC = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm AB

- a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông
- b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SIC) và (ABC)
- c) Gọi N là trung điểm AC, tính khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (SBC)

9. Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a. $SA = SB = SC = \frac{2a\sqrt{3}}{2}$

- a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)
- b) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)
- c) Tính diện tích tam giác SBC

10. Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = a$. $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

- a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)
- b) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) vuông góc nhau
- c) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC)
- d) Tính diện tích tam giác (SAC)

11. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh a, góc $A = 60^\circ$

$$SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- a) Tính hình chóp từ S đến mặt phẳng (ABCD)
 - b) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD) vuông góc nhau
 - c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SBD) và (SAC) vuông góc nhau và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD)
 - d) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) \Rightarrow diện tích ΔSBD
- Hình lăng trụ*

1. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy = cạnh bên = a. Gọi I, J là trung điểm BC và BB'

- a) Chứng minh rằng $BC' \perp (AIJ)$
- b) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AIJ) và (ABC)
- c) Tính diện tích tam giác AIJ

2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi ABCD cạnh a,

$$\text{góc } A = 60^\circ, A'A = A'B = A'D = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- a) Tính chiều cao lăng trụ
- b) Chứng minh rằng hai mặt chéo của lăng trụ vuông góc nhau
- c) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (A'BD) và (ABCD)
- d) Tính diện tích tam giác A'BD và diện tích toàn phần của lăng trụ

3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

- a) Chứng minh rằng hai mặt chéo vuông góc nhau
- b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD'
- c) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (D'AC) và (ABCD)
- d) Tính diện tích tam giác D'AC

4. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, góc $A = 60^\circ$. Gọi O và O' là tâm của hai đáy, $OO' = 2a$

- a) Tính diện tích các mặt chéo của lăng trụ
- b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của lăng trụ

5. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đường chéo B'D = 12. Cạnh đáy CD = 6; cạnh bên CC' = 8

- a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp
 b) Tính góc giữa B'D và các mặt hình hộp
6. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi ABCD cạnh a, tâm O và góc A = 60° ; D'O vuông góc (ABCD) ; cạnh bên tạo với đáy một góc $\varphi = 60^\circ$
- a) Xác định góc φ và tính chiều cao, cạnh bên của hình hộp
 b) Chứng minh rằng $BD' \perp A'C'$
 c) Chứng minh rằng các mặt bên của hình hộp bằng nhau, suy ra S_{tp}
 d) Tính thể tích hình hộp và thể tích tứ diện ACDC'
- 7*. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên = a và hình chiếu của C' trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm của tam giác ABC
- a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy, chiều cao của lăng trụ
 b) Chứng minh rằng các mặt bên AA'C'C và BB'C'C bằng nhau ; mặt bên ABB'A' là hình vuông. Từ đó tính diện tích toàn phần của lăng trụ
 c) Tính thể tích tứ diện OBCB'
- 8*. Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a. Đường chéo AB' của mặt bên tạo với đáy một góc $\varphi = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm BC
- a) Tính diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ
 b) Xác định hình chiếu của A trên BB'C'C
 c) Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (BB'C'C)
 d) Tính thể tích tứ diện BAIC'
- 9*. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a; cạnh bên AA' = a và hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm I của AC
- a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy
 b) Tính thể tích lăng trụ
 c) Tính thể tích tứ diện AIBC'
10. Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi tâm O; cạnh a góc A = 60° ; B'O vuông góc (ABCD) ; cạnh bên bằng a
- a) Tính góc giữa cạnh bên và đáy và thể tích của lăng trụ
 b) Chứng minh rằng hai mặt chéo vuông góc nhau
 c) Tính diện tích toàn phần lăng trụ
11. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A, AC = a, góc BCA = 60° . BC' tạo với mặt phẳng (AA'C'C) một góc $\alpha = 45^\circ$
- a) Xác định α và tính chiều cao lăng trụ
 b) Tính diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ
12. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy = a, đường chéo BC' tạo với mặt phẳng (AA'B'B) một góc $\alpha = 30^\circ$
- a) Xác định α và tính chiều cao lăng trụ

- b) Tính diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ
13. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, điểm A' cách đều A, B, C và AA' tạo với đáy một góc $\varphi = 60^\circ$
- a) Chứng minh rằng mặt bên BB'C'C là một hình chữ nhật
 b) Tính diện tích xung quanh và thể tích lăng trụ
 c) Tính thể tích tứ diện ABB'C'

Mặt cầu

1. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, ABCD là hình chữ nhật và $AB = a$, $SA = BC = 2a$. Chứng minh rằng 5 điểm S, A, B, C, D cùng nằm trên 1 mặt cầu. Tìm tâm, bán kính của mặt cầu đó
2. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. BE, BF là đường cao của tam giác ABC và SBC. Gọi H và H' lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC
- a) Chứng minh rằng SH', AH và BC đồng quy tại một điểm I
 b) Chứng minh rằng 5 điểm E, F, I, S, B ở trên một mặt cầu
3. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông cạnh a. Dụng mặt phẳng β đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC, β lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'
- a) Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên một mặt cầu cố định
 b) Tính diện tích mặt cầu ấy
4. Trong mặt phẳng α cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn đường kính AD. Trên đường thẳng $\perp \alpha$ tại A ta lấy điểm S. Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB và SC
- a) Chứng minh rằng các tam giác AHD, AKD vuông
 b) Chứng minh rằng 5 điểm A, B, C, H, K nằm trên 1 mặt cầu
5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy = a, cạnh bên = 2a. Tìm tâm, bán kính mặt cầu đi qua 4 điểm S, A, B, C
6. Trong mặt phẳng α cho đường tròn đường kính AB = 2R. Trên đường tròn ta lấy 1 điểm C. Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$). Gọi I là trung điểm CH. Trên tia $I_x \perp \alpha$ ta lấy điểm S sao cho $\widehat{SHI} = 60^\circ$. Chứng minh rằng $\Delta SAB = \Delta CAB$. từ đó suy ra tâm, bán kính của mặt cầu đi qua 4 đỉnh S, A, B, C
7. Cho tứ diện SABC có $SA \perp (ABC)$, và các cạnh $SA = a$, $AB = b$, $AC = c$. Xác định tâm, bán kính mặt cầu đi qua 4 đỉnh S, A, B, C trong các trường hợp sau:
- a) $\widehat{BAC} = 90^\circ$

b) $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $b = c$

c) $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $b = c$

8. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. ABCD là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a$ và $AD = 2a$. Gọi E là trung điểm cạnh AD. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.CDE

9. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a

a) Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (BCD)

b) Tính góc giữa cạnh bên và đáy

c) Tính góc giữa mặt bên và đáy

d) Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

10. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Cạnh bên hợp với đáy 1 góc $\varphi = 60^\circ$

a) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

b) Tính góc giữa mặt bên và đáy

11. Cho tứ diện SABC có $SA \perp (ABC)$ và đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt bên (SBC) hợp với đáy 1 góc $\varphi = 30^\circ$

a) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC)

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng, đường thẳng

1. Cho mặt cầu tâm O đường kính $AB = 2R$. Điểm H thuộc

đoạn AB sao cho $AH = \frac{4}{3}R$. Mặt phẳng $\alpha \perp AB$ tại H,

cắt mặt cầu theo đường tròn (L). Tính diện tích (L)

2. Cho mặt cầu $S(O;R)$; A là 1 điểm nằm trên mặt cầu.

Mặt phẳng α qua A sao cho góc giữa OA và α bằng 30°

a) Tính diện tích đường tròn thiết diện giữa α và mặt cầu

b) Đường thẳng qua A và $\perp \alpha$ cắt (S) tại B. Tính độ dài AB

3. Cho mặt cầu $S(O;R)$ tiếp xúc 3 cạnh tam giác ABC

a) Chứng minh rằng hình chiếu H của O trên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

b) Biết độ dài 3 cạnh của ΔABC là 6,8,10 và $R = 3$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC)

4. Trong mặt phẳng α cho đường tròn đường kính AB tâm

O. Gọi M là điểm nằm trên đường tròn. Trên đường thẳng

$\perp \alpha$ tại A ta lấy điểm C. Gọi H là hình chiếu của A trên

mặt cầu

a) Chứng minh rằng H nằm trên mặt cầu (O)

b) Tiếp tuyến với (O) tại A và M cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $KA = KM = KH$. Từ đó suy ra KH là tiếp tuyến của mặt cầu (O)

5. Cho mặt cầu $(O;R)$ và một điểm A biết $OA = 2R$. Qua A kẻ một tiếp tuyến với mặt cầu tại B và một cát tuyến cắt mặt cầu tại C và D sao cho

$$CD = R\sqrt{3}$$

a) Tính độ dài đoạn AB

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng CD

6. Cho mặt cầu $(O;R)$ tiếp xúc mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với I qua tâm O. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu vuông góc với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (P) tại A và B. Chứng minh rằng $AB^2 = AI^2 + IB^2$

7. Chứng minh rằng nếu một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một tứ diện thì tứ diện đó có tổng các cặp cạnh đối diện bằng nhau