

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Phương trình tham số.

* Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$, có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$ là

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (u_1^2 + u_2^2 \neq 0)$$

* Phương trình đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k là: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

* Nếu Δ có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$ với $u_1 \neq 0$ thì hệ số góc của Δ là $k = \frac{u_2}{u_1}$.

* Nếu Δ có hệ số góc là k thì nó có một VTCP là $\vec{u} = (1; k)$.

2. Phương trình tổng quát.

* Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

* Phương trình $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ là phương trình tổng quát của đường thẳng nhận

$\vec{n} = (a; b)$ làm VTPT; $\vec{a} = (b; -a)$ làm vec tơ chỉ phương

* Đường thẳng Δ cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ có phương trình theo đoạn chắn là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a, b \neq 0)$$

* Cho (d) : $ax+by+c=0$ Nếu $\Delta // d$ thì phương trình Δ là $ax+by+m=0$ (m khác c)
Nếu Δ vuông góc d thì phương trình Δ là : $bx-ay+m=0$

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 ta xét số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

☞ **Chú ý:** Nếu $a_2b_2c_2 \neq 0$ thì $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

4. Góc giữa hai đường thẳng. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có VTPT \vec{n}_1 và \vec{n}_2 được tính theo công thức:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Khoảng cách từ một điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ cho bởi công thức:

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

B. BÀI TẬP.

1/ Lập phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng (d) trong mỗi trường hợp sau:

- a) (d) đi qua điểm $M(1 ; 1)$ và có VTPT $\vec{n} = (3; -2)$
- b) (d) đi qua điểm $A(2 ; -1)$ và có hệ số góc $k = -1/2$
- c) (d) đi qua hai điểm $A(2 ; 0)$ và $B(0 ; -3)$.
- d) (d) đi qua điểm $A(1 ; -2)$ và song song với đường thẳng $2x - 3y - 3 = 0$.
- e) (d) đi qua điểm $A(2 ; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $x - y + 5 = 0$.

2/ Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

- a) Tìm điểm M nằm trên Δ và cách điểm $A(0 ; 1)$ một khoảng bằng 5.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng $x + y + 1 = 0$.
- c) Tìm điểm M trên Δ sao cho AM ngắn nhất.

3/ Cho điểm $M(1 ; 2)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng qua M và chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn có độ dài bằng nhau.

4/ Cho hai đường thẳng $(d_1): x + 2y + 4 = 0, (d_2): 2x - y + 6 = 0$.

- a) Tính góc giữa hai đường thẳng.
- b) Lập phương trình các đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng.

5/ Lập phương trình ba đường trung trực của tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là $M(-1 ; 0), N(4 ; 1),$

$P(2 ; 4)$.

6/ Cho tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng AB: $x - 3y + 11 = 0$, đường cao AH: $3x + 7y - 15 = 0$, đường cao BH: $3x - 5y + 13 = 0$. Tìm phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của tam giác.

7/ Cho tam giác ABC có $A(-2 ; 3)$ và hai đường trung tuyến : $2x - y + 1 = 0$ và $x + y - 4 = 0$. Hãy viết phương trình ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.

8/ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2 ; 5)$ và cách đều hai điểm $A(-1 ; 2)$ và $B(5 ; 4)$.

9/ Hai cạnh của hình bình hành có phương trình $x - 3y = 0$ và $2x + 5y + 6 = 0$. Một đỉnh của hình bình hành là $A(4 ; -1)$. Viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành đó.

10/ Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$ và hai điểm $O(0 ; 0), A(2 ; 0)$

- a) Chứng tỏ rằng hai điểm O và A nằm cùng một phía đối với đường thẳng Δ .
- b) Tìm tọa độ điểm O' là điểm đối xứng của O qua Δ .
- c) Tìm trên Δ điểm B sao cho độ dài đường gấp khúc OBA ngắn nhất.

KHOẢNG CÁCH

Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Bài 1: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d

- 1) $M(2; -7); d: 5x - 12y + 15 = 0$
- 2) $M(1; -3); d: 4x - 3y + 3 = 0$

[Type text]

3) M(2;3); d: $x-y+1=0$

4) M(2;4); d: $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \end{cases}$ (hd: chuyển d về dạng tổng quát)

5) M(3;5) và (d): $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{5}$

6) M(1;3) và (d): $3x+4y-2=0$

Bài 2: Cho d : $x-2y-3=0$; d' : $x-2y+4=0$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d'

Bài 3: Tìm bán kính đường tròn tâm I(2 ;4) tiếp xúc với đường thẳng d : $6x+8y-1=0$

Bài 4: $d_1 : x-2y-3=0; d_2 : x+y+1=0$. Tìm $M \in d_1$ để khoảng cách từ M đến d_2 bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 5: Tìm M

a) $M \in ox$ và cách (Δ): $4x+3y+1=0$ một khoảng cách bằng 5

b) $M \in oy$ và cách (Δ): $4x+y+1=0$ một khoảng cách bằng $\sqrt{17}$

Bài 6: A(1;1); B(4;-3), (d): $x-2y-1=0$. Tìm C thuộc (d) để khoảng cách từ C đến AB bằng 6

Đ/s: $C(7;3); C\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$

Bài 7: $d_1 : x+y+3=0; d_2 : x-y-4=0; d_3 : x-2y=0$. Tìm M thuộc d_3 để khoảng cách từ M đến d_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến d_2

Bài 8: $d_1 : 3x-4y+6=0; d_2 : 4x-3y-9=0$. Tìm $M \in oy$ để khoảng cách từ M đến d_1 bằng khoảng cách từ M đến d_2

Bài 9: Tam giác ABC có A(1;0); B(3;-1), (d): $x-2y-1=0$. Tìm C \in (d) để $S_{ABC} = 6$ Đ/s: C(7;3); C(-5;-3)

Bài 10: Tam giác ABC có A(2;-4); B(0;-2), (d): $3x-y+1=0$. Tìm C \in (d) để $S_{ABC} = 1$

Bài 11: Tam giác ABC có B(2;-1); C(1;-2), trọng tâm G thuộc đường thẳng d: $x+y-2=0$. Tìm A để

$S_{ABC} = \frac{3}{2}$ Đ/s: C(6;0); C(3;3)

Bài 12: Tam giác ABC có A(4;0); B(0;3), $S_{ABC} = \frac{45}{2}$, trọng tâm G thuộc đường thẳng d: $x-y-2=0$. Tìm

tọa độ C

Bài 13: Tam giác ABC có A(3;1); B(1;-3), $S_{ABC} = 3$, trọng tâm G thuộc trục hoành. Tìm tọa độ C

Bài 14: Tam giác ABC có A(1;-2); B(2;-3), $S_{ABC} = 4$, trọng tâm G thuộc đường thẳng d: $x-y-2=0$. Tìm tọa độ C

Bài 15: Tam giác ABC có A(2;-5); B(-3;7), $S_{ABC} = \frac{69}{2}$, trọng tâm G thuộc đường thẳng

d: $5x-3y+1=0$. Tìm tọa độ C

Bài 16 : A(1;0); B(-2;4); C(-1;4); D(3;5). Tìm tập hợp điểm M để $S_{MAB} = S_{MCD}$

Đ/s : $3x+7y-21=0$; $5x-y+13=0$ (hd : $S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB.d(M, AB) = \frac{1}{2} CD.d(M, CD)$)

Lập phương trình đường thẳng

[Type text]

Bài 1 : Lập phương trình đường thẳng d biết

- 1) Song song với $d' : 3x+4y+2=0$ và cách điểm $A(4 ;1)$ một khoảng là 3
- 2) Song song với $d' : x-y+1=0$ và cách điểm $A(5 ; -2)$ một khoảng là $4\sqrt{2}$
- 3) Vuông góc với $d' : 5x+12y+3=0$ và cách điểm $A(-4 ;3)$ một khoảng là 5
- 4) Vuông góc với $d' : 6x+8y-5=0$ và cách điểm $A(-7 ;1)$ một khoảng là 5

Bài 2 : Lập phương trình đường thẳng d biết $d//d'$ và cách d' một khoảng l

- 1) $d' : x+3y+4=0 ; l = \sqrt{10}$ Đ/s : $x+3y+14=0 ; x+3y-6=0$
- 2) $d' : 4x+3y-6=0 ; l = 2$ Đ/s : $4x+3y+4=0 ; 4x+3y-16=0$
- 3) $d' : 5x-12y+10=0 ; l = 1$ Đ/s : $5x-12y+23=0 ; 5x-12y-3=0$

Bài 3 : Lập phương trình đường thẳng d biết $d \perp d'$ và cách M một khoảng l

- 1) $d' : x-y+2=0 ; M(1 ;1) ; l = \sqrt{2}$ Đ/s : $x+y-4=0 ; x+y=0$
- 2) $d' : 3x-4y+3=0 ; M(2 ; -1) ; l = 3$ Đ/s : $4x+3y+10=0 ; 4x+3y-20=0$
- 3) $d' : 8x+6y-1=0 ; M(-4 ;3) ; l = 1$ Đ/s : $3x-4y+29=0 ; 3x-4y+19=0$

Bài 4 : Lập phương trình đường thẳng d biết d qua A và cách B một khoảng l

- 1) $A(2 ;0) ; B(1 ;3) ; l = \sqrt{2}$ Đ/s : $x+y-2=0 ; 7x-y-14=0$
- 2) $A(0 ;0) ; B(1 ;2) ; l = 2$ Đ/s : $y=0 ; 4x+3y=0$
- 3) $A(1 ;1) ; B(2 ; -1) ; l = \frac{\sqrt{10}}{2}$ Đ/s : $x+3y-4=0 ; 3x-y-2=0$
- 4) $A(2 ;5) ; B(5 ;1) ; l = 3$ Đ/s : $x-2=0 ; 7x+24y-134=0$

Bài 5 : Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases} ; A(0;1);N(4;2)$

Lập phương trình đường thẳng d' qua A cách N một khoảng bằng khoảng cách từ A đến đường thẳng d.
Đ/s: $x-2y+2=0 ; x-38y+38=0$

Bài 6 : Lập phương trình đường thẳng đi qua A và cách đều hai điểm B và C

- 1) $A(2 ;4) ; B(4 ; -1) ; C(0 ;3)$ Đ/s : $x+y-6=0 ; x-2=0$
- 2) $A(4 ; -1) ; B(1;2) ; C(-3 ;4)$ Đ/s : $x+2y-2=0 ; 4x+5y-11=0$
- 3) $A(0;-3) ; B(1 ; -5) ; C(-3 ;1)$ Đ/s : $3x+2y+6=0 ; x+y+3=0$

Bài 7 : Cho tam giác ABC, biết $AB : x-y-2=0 ; BC : 7x+y-26=0 ; CA : x+y-2=0$. Viết phương trình các đường phân giác trong của các góc A, B, C. Tìm tọa độ tâm J và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

ABC. Hd : $A(0 ;2) ; B(3 ;5) ; C(4 ; -2) ; J(3 ;2) ; l_A : y - 2 = 0 ; l_B : x - 3 = 0 ; l_C : 4x + y - 14 = 0 ; r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 8 : Cho tam giác ABC, biết $AB : x-2y+2=0 ; BC : x+2y+6=0 ; CA : 2x-y-8=0$. Viết phương trình các đường phân giác trong của các góc A, B, C. Tìm tọa độ tâm J và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

ABC. Hd : $A(6 ;4) ; B(-4 ; -1) ; C(2 ; -4) ; J(1 ; -1) ; l_A : x - y - 2 = 0 ; l_B : y + 1 = 0 ; l_C : 3x + y - 2 = 0 ; r = \sqrt{5}$

Bài 9 : Cho tam giác ABC, biết $AB : 2x-y+2=0 ; BC : x-2y-5=0 ; CA : 2x+y-10=0$. Viết phương trình các đường phân giác trong của các góc A, B, C. Tìm tọa độ tâm J và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

ABC. Hd : $A(2 ;6) ; B(-3 ; -4) ; C(5 ;0) ; J(2 ;1) ; l_A : x - 2 = 0 ; l_B : x - y - 1 = 0 ; l_C : x + 3y - 5 = 0 ; r = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. phương trình đường tròn.

[Type text]

* Phương trình đường tròn tâm $I(a ; b)$, bán kính R là : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
 * Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của đường tròn tâm $I(a ; b)$, bán kính

$$R =$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

* Nếu $a^2 + b^2 - c = 0$ thì chỉ có một điểm $I(a ; b)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

* Nếu $a^2 + b^2 - c < 0$ thì không có điểm $M(x ; y)$ nào thỏa mãn phương trình: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn.

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ của đường tròn tâm $I(a ; b)$ có phương trình $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

B. BÀI TẬP.

1/ Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 100 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

c)

$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$

2/ Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình của đường tròn (C) có tâm $I(2 ; 3)$ và thỏa mãn điều kiện sau :

a) (C) có bán kính là 5

b) (C) đi qua gốc tọa độ

c) (C) tiếp xúc với trục Ox.

d) (C) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 4x + 3y - 12 = 0$

3/ Cho ba điểm $A(1 ; 4)$, $B(-7 ; 4)$, $C(2 ; -5)$.

a) Lập phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tìm tâm và bán kính của (C).

4/ Cho đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1 ; 2)$, $B(-2 ; 3)$ và có tâm ở trên đường thẳng $\Delta : 3x - y + 10 = 0$

a) Tìm tọa độ tâm của (C)

b) Tính bán kính R của (C)

c) Viết phương trình của (C).

5/ Lập PT của đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1 ; 2)$, $B(3 ; 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x + y - 3 = 0$.

6/ Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và đi qua điểm $M(4 ; 2)$.

7/ Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - x - 7y = 0$ và đường thẳng (d) : $7x - y = 0$

a) Tìm tọa độ giao điểm của (C) và (d). Lập phương trình tiếp tuyến với (C) tại các giao điểm đó.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến.

8/ Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm $A(1 ; 3)$

a) Chứng tỏ điểm A nằm ngoài đường tròn (C).

b) Lập phương trình tiếp tuyến với (C) xuất phát từ điểm A.

9/ Lập phương trình tiếp tuyến với (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ biết tiếp tuyến :

a) Song song với đường thẳng (d) : $x - 2y + 3 = 0$

b) Vuông góc với đường thẳng (d') : $3x - y + 4 = 0$

10/ Cho đường tròn (C) : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ và điểm $M(2 ; -1)$.

a) Chứng tỏ rằng qua M ta vẽ được hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) với (C). Hãy viết phương trình của (d_1) và (d_2) .

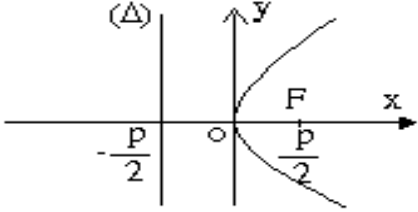
b) Gọi M_1 và M_2 lần lượt là hai tiếp điểm của (d_1) và (d_2) với (C), hãy viết phương trình của đường thẳng (d) đi qua M_1 và M_2 .

III. ELIP – HYPERBOL- PARABOL

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

[Type text]

I. ELIP	II. HYPERBOL
<p>1) Định nghĩa: $(E) = \{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}$ $F_1F_2 = 2c, a > c > 0$</p> <p>2) Phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$ $a > c > 0$ và $a > b > 0$</p> <p>3) Hình dạng và các yếu tố: a) Hình dạng:</p> <p>b) Các yếu tố:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $A_1A_2 = 2a$: trục lớn • $B_1B_2 = 2b$: trục nhỏ • Các đỉnh: $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$ • Các tiêu điểm: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ • Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$ • Bán kính qua tiêu của điểm $M \in (E)$: $\begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M \\ MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M \end{cases}$ <ul style="list-style-type: none"> • Tâm sai: $e = \frac{c}{a} < 1$ ($0 < e < 1$) • Phương trình đường chuẩn: $(\Delta_1): x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}; (\Delta_2): x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>III. PARABOL 1. Định nghĩa: $(P) = \{M \mid MF = d(M, \Delta)\}$</p>	<p>1) Định nghĩa: $(H) = \{M \mid MF_1 - MF_2 = 2a\} \quad F_1F_2 = 2c, c > a$</p> <p>2) Phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$</p> <p>3) Hình dạng và các yếu tố: a) Hình dạng:</p> <p>b) Các yếu tố:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $A_1A_2 = 2a$: trục thực • $B_1B_2 = 2b$: trục ảo • Các đỉnh: $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$ • Các tiêu điểm: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ • Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$ • Bán kính qua tiêu của điểm $M \in (H)$: $\begin{cases} MF_1 = \left a + \frac{c}{a}x_M \right \\ MF_2 = \left a - \frac{c}{a}x_M \right \end{cases}$ <ul style="list-style-type: none"> • Tâm sai: $e = \frac{c}{a} > 1$ • Phương trình đường chuẩn: $(\Delta_1): x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}; (\Delta_2): x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ • Phương trình tiệm cận: $(d_1): y = -\frac{b}{a}x; (d_2): y = \frac{b}{a}x$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/>

<p>F: tiêu điểm, Δ : đường chuẩn $P = d(F, \Delta) > 0$: tham số tiêu của (P) 2. Phương trình chính tắc của (P). $y^2 = 2px$ ($p > 0$)</p> 	<p>3. Các yếu tố.</p> <ul style="list-style-type: none"> • O(0;0) là đỉnh của parabol • Ox là trục đối xứng của parabol • Bán kính qua tiêu của điểm $M \in (P)$: $MF = \frac{p}{2} + x_M$ • Tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0)$ • Đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{p}{2}$
--	--

B. BÀI TẬP

*** Elip (E):**

1/ Xác định độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, tọa độ các tiêu điểm và các đỉnh của elip sau:

- a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ b) $4x^2 + 16y^2 - 1 = 0$ c) $x^2 + 4y^2 = 1$ d) $x^2 + 3y^2 = 2$

2/ Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết.

- a) A(0 ; - 2) là một đỉnh và F(1 ; 0) là một tiêu điểm của (E).
 b) F₁(-7 ; 0) là một tiêu điểm và (E) đi qua M(-2 ; 12)
 c) Tiêu cự bằng 6, tâm sai bằng 3/5.
 d) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm 4, y = \pm 3$
 e) (E) đi qua hai điểm M(4 ; $\sqrt{3}$), N(2 $\sqrt{2}$; -3).

3/ Tìm những điểm trên elip (E) : $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ thỏa mãn :

- a) Có bán kính qua tiêu điểm bên trái bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm bên phải.
 b) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

4/ Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- a) Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh ; tính tâm sai và vẽ (E).
 b) Xác định m để đường thẳng d : $y = x + m$ và (E) có điểm chung.
 c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M(1 ; 1) và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

***HYPERBOL (H) :**

5/ Xác định độ dài trục thực, trục ảo ; tiêu cự ; tâm sai ; tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh và phương trình các đường tiệm cận của mỗi hyperbol (H) sau :(Vẽ (H) có phương trình ở câu a), b) và d))

- a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ b) $4x^2 - y^2 = 1$ c) $16x^2 - 25y^2 = 400$ d) $x^2 - y^2 = 1$

6/ Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) biết :

- a) Một tiêu điểm là (5 ; 0), một đỉnh là (- 4 ; 0).
 b) Độ dài trục ảo là 12, tâm sai bằng 5/4.

[Type text]

c) Tâm sai bằng $\sqrt{2}$, (H) đi qua điểm A(-5 ; 3).
 $2\sqrt{2}$).

d)(H) đi qua hai điểm A(6 ; -1), B(-8 ;

7/ Tìm các điểm trên hyperbol (H) : $4x^2 - y^2 - 4 = 0$ thỏa mãn :

a) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

b) Có tọa độ nguyên.

***PARABOL (P) :**

8/ Xác định tham số tiêu, tọa độ đỉnh, tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các parabol (P) sau :

a) $y^2 = 4x$ b) $2y^2 - x = 0$ c) $5y^2 = 12x$ (Vẽ (P) có phương trình ở câu a))

9/ Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết :

a) (P) có tiêu điểm F(1 ; 0)

b) (P) có tham số tiêu $p = 5$

c) (P) nhận đường thẳng $d : x = -2$ là đường chuẩn.

10/ : Cho parabol (P): $y^2 = 8x$

a) Tìm tọa độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của (P)

b) Giả sử đường thẳng (d) đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ tương ứng là x_1, x_2 Chứng minh: $AB = x_1 + x_2 + 4$

MỘT SỐ ĐỀ KT1T THAM KHẢO

ĐỀ 1

Bài 1. Cho tam giác ABC, biết A(1 ; 4), B(3 ; -1), C(6 ; 2). Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng chứa đường cao AH và trung tuyến AM của tam giác.

Bài 2. Cho điểm A = (-1 ; 2) và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \end{cases}$

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ .

b) Tính diện tích của hình tròn tâm A tiếp xúc với Δ .

Bài 3. Lập phương trình của đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a)(C) có tâm I(-1 ; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x - 2y + 7 = 0$.

b)(C) có đường kính là AB với A(1 ; 1), B(7 ; 5).

Bài 4. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình của đường tròn?

ĐỀ 2

Câu 1: Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$

a) Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm A (-3;0).

c) Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C), biết d song song $\Delta : 2x - y + 1 = 0$

d) Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C), biết d vuông góc $\Delta : 2x - y + 1 = 0$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có A(-1;-2); B(4;-3); C(2;3).

a) Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm B, C..

b) Lập phương trình đường trung trực cạnh AB.

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng (d) : $x - y + 2 = 0$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \end{cases}$

a) Tìm vectơ chỉ phương và phương trình tổng quát của đường thẳng Δ .

b) Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng Δ sao cho độ dài đoạn OM ngắn nhất, với O là gốc tọa độ./.

ĐỀ 3

Bài 1. Đường thẳng (d) đi qua 2 điểm A(1; -2) và B(3;3) .Tìm phương trình tổng quát (d)

Bài 2. Cho (d1) : $x - 2y + 1 = 0$ và (d2): $3x - y - 2 = 0$. Tìm số đo của góc giữa 2 đường thẳng (d1) và (d2) .

Bài 3 Cho elip (E) : $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tìm tiêu điểm ;tâm sai ;các đỉnh ;độ dài các trục ;tiêu cự của (E)

Bài 4 Cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

a)Tìm tọa độ tâm và bán kính (C) .

b)Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại A(3;1)

c)Định m để đường thẳng (d) : $x + y + m = 0$ tiếp xúc với (C).

d)Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn (C),biết d có hệ số góc $k=3$

Bài 5 : Tìm tất cả các giá trị của m sao cho (Cm) : $x^2 + y^2 + 2(m + 2)x - 2(m + 4)y + 34 = 0$ là phương trình của một đường tròn .

ĐỀ 4

Bài 1: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = -16 + 4t \\ y = -6 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

a) Tìm tọa độ các điểm M ; N lần lượt là giao điểm của (d) với Ox; Oy.

b) Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác OMN.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M.

d) Viết phương trình chính tắc của Elip biết qua điểm N và nhận M làm một tiêu điểm

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A(- 2; 1) B(6; - 3); C(1;7).

a) Tính vectơ : \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} . Chứng minh : ABC là một tam giác vuông.

b) Viết phương trình đường trung tuyến AM và đường trung trực cạnh BC của tam giác ABC.

c) Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3: a) Viết phương trình chính tắc của Elip biết Tiêu cự bằng 8 và qua điểm M($\sqrt{15}$; -1)

b) Xác định độ dài các trục, tọa độ tiêu điểm; tọa độ các đỉnh của Elip có phương trình sau : $x^2 + 5y^2 = 20$.

ĐỀ 5

Bài 1: Cho đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

a) Tìm điểm M nằm trên Δ và cách điểm A(0 ; 1) một khoảng bằng 5.

b) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ với đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

c) Tìm điểm M trên Δ sao cho AM ngắn nhất.

Bài 2: Lập phương trình ba đường trung trực của tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là M(-1 ; 0), N(4 ; 1), P(2 ; 4).

Bài 3: Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- Tim tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh ; tính tâm sai và vẽ (E).
- Xác định m để đường thẳng d : $y = x + m$ và (E) có điểm chung

Bài 4 : a)Viết phương trình của đường tròn (C) biết qua hai điểm A(2 ; 6) ; B(6 ; 6) và tiếp xúc với đường thẳng (d): $2x-9y-10 = 0$.

- Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M(1 ; 1).

Bài 5 :Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết cạnh (AB): $4x + y - 12 = 0$; đường cao (AA'): $2x + 2y - 9 = 0$; đường cao (BB'): $5x - 4y - 15 = 0$. viết phương trình hai cạnh còn lại của tam giác ABC.

ĐỀ 6

Bài 1: Cho ABC biết A (-1;2); B (2;-4), C (1;0)

- Viết phương trình ba đường cao của ABC.
- Tìm tọa độ trực tâm H của ABC.

Bài 2: Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ABC biết phương trình các cạnh ABC:

(AB): $3x + 4y - 6 = 0$

(AC): $4x + 3y - 1 = 0$

(BC): $y = 0$

Bài 3: Cho elip (E): $9x^2 + 16y^2 = 144$. Tìm tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tiêu cự của (E).

Bài 4 : Trong mặt phẳng Oxy cho ABC với A(3 ; 4) , B(1 ; 3) , C(5 ; 0)

- Viết phương trình tổng quát của đường thẳng BC . Tính diện tích ΔABC .
- Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC , xác định rõ tâm và bán kính
- Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn (ABC) biết Δ song song với đường thẳng

$$d : 6x - 8y + 19 = 0$$

Chương VI. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Góc và cung lượng giác.

* Cung tròn có số đo bằng $\frac{1}{360}$ số đo của đường tròn gọi là 1 độ và kí hiệu : 1^0 . Cung tròn có độ dài

bằng bán kính gọi là cung có số đo 1 radian, gọi tắt là cung 1 radian.

* Góc lượng giác là góc được gắn với đường tròn lượng giác có nghĩa là có chiều dương, chiều âm và độ lớn tùy ý. Hai góc lượng giác có chung tia đầu và tia cuối có dạng α và $\alpha + k2\pi$.

* Cho đường tròn lượng giác gốc A, góc α có tia cuối là OM. Khi đó tung độ của M gọi là $\sin \alpha$, hoành độ của M gọi là $\cos \alpha$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang α , kí hiệu : $\tan \alpha$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là côtang α , kí hiệu : $\cot \alpha$

$\cot \alpha$

Ta có : $-1 \leq \sin \alpha, \cos \alpha \leq 1$; $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$; $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ; \dots \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 ; \dots 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} ; \dots 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

2. Giá trị lượng giác của những góc có liên quan đặc biệt.

- * Hai góc đối nhau thì có cosin bằng nhau còn các giá trị khác đối nhau.
- * Hai góc bù nhau thì có sin bằng nhau còn các giá trị khác đối nhau.
- * Hai góc hơn kém nhau π thì có sin và cosin đối nhau còn các giá trị khác bằng nhau.
- * Hai góc phụ nhau thì có cosin góc này bằng sin góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

3. Công thức lượng giác.

* **Công thức cộng.**

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

* **Công thức nhân đôi.**

$$\begin{aligned} * \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 & * \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ * \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

* **Công thức hạ bậc.**

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} ; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

* **Công thức biến đổi tổng thành tích.**

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

* **Công thức biến đổi tổng thành tích.**

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ; & \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} ; & \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

B. BÀI TẬP.

LOẠI 1 : Tính giá trị lượng giác 1 cung

1. a) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Cho Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.
 b) Cho $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.
2. a) Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, $\cot 2\alpha$

b) Cho $\cot \alpha = 2$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, $\cot 2\alpha$.

c) Cho $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

3. a) Cho $\sin \alpha = -\frac{5}{9}$; và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$, $\cot \frac{\alpha}{2}$.

b) Cho $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$, $\cot \frac{\alpha}{2}$.

4. Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Cho Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$

LOẠI 2: Chứng minh hằng đẳng thức

5. Chứng minh rằng:

a) $(1 + \cot \alpha) \sin^3 \alpha + (1 + \tan \alpha) \cos^3 \alpha = \sin \alpha + \cos \alpha$

b) $\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$

c) $\frac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \tan^6 \alpha$

d) $(\cot \alpha + \tan \alpha)^2 - (\cot \alpha - \tan \alpha)^2 = 4$

e) $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha = 1 - 2 \sin 2\alpha$

f) $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$

g) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$

h) $\frac{4 \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 16 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

k) $\frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha} = -\cot \frac{\alpha}{2} \dots l) \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \tan \alpha$

6. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$

b) $\frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$

c) $\frac{2 \cos 2x - \sin 4x}{2 \cos 2x + \sin 4x} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$

d) $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$

7. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x)$

b) $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)$

c) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

d) $(1 - \sin x)(1 + \sin x) = \sin^2 x \cdot \cot^2 x$

e) $\frac{\sin x \cdot \cot x}{\cos x} = 1$

f) $\sin^2 x + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos^2 x$

8. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

a. $(\sin a - \cos a)^2 = \cos^2 a(1 - \tan a) + \sin^2 a(1 - \cot a)$

b. $\tan^2 a - \sin^2 a = \tan^2 a \cdot \sin^2 a$

c. $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

d. $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$

e. $\sin^4 a + \cos^4 a - \sin^6 a - \cos^6 a = \sin^2 a \cdot \cos^2 a$

f.

$3(\cos^4 a + \sin^4 a) - 2(\cos^6 a + \sin^6 a) = 1$

g. $\frac{\sin a}{1 + \cos a} + \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{2}{\sin a}$

h. $\sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} - \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = 2 \cot a \left(0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$

9. Chứng minh rằng:

a) $\cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$

b) $\sin 5\alpha - 2 \sin \alpha (\cos 4\alpha + \cos 2\alpha) = \sin \alpha$

c) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$d) $\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \tan^4 \alpha$

LOẠI 3: Rút gọn một biểu thức

10. Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a + \sin 2a}$

b) $B = \frac{2 \sin 2a - \sin 4a}{2 \sin 2a + \sin 4a}$

c) $C = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right)}$

d) $D = \frac{\sin a - \sin 3a}{2 \cos 4a}$

e) $A = \frac{1 - 2 \sin^2 a}{\sin a - \cos a}$

f) $B = \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} - \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}$

g) $M = (1 - \sin^2 a) \cot^2 a + 1 - \cot^2 a$

h) $N = \frac{2 \cos^2 a - 1}{\sin a + \cos a}$

i) $K = \sqrt{\sin^2 a (1 + \cot a) + \cos^2 a (1 + \tan a)}$

j) $P = (1 + \cot a) \sin^3 a + (1 + \tan a) \cos^3 a$

k) $Q = \frac{\sin^2 a + 2 \cos^2 a - 1}{\cot^2 a}$

l) $E = \frac{\sin^2 a - \tan^2 a}{\cos^2 a - \cot^2 a}$

m) $F = \frac{(\sin a + \cos a)^2 - 1}{\cot a - \sin a \cdot \cos a}$

LOẠI 4: Tính giá trị một biểu thức

12. Tính $E = \frac{\cot a - 2 \tan a}{\tan a + 3 \cot a}$ biết $\sin a = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < a < 180^\circ$

13. Tính $F = \frac{\sin a - 3 \cos a}{\cos a + 2 \sin a}$ biết $\tan a = -3$

14. Tính $G = \frac{2 \cos^2 a + \sin a \cdot \cos a - \sin^2 a}{\sin^2 a + 3 \cos^2 a - 4}$ biết $\cot a = 2$

15. Tính $B = \frac{2 \sin a - 3 \cos a}{\sin a + \cos a}$ biết $\tan a = 2$

16. Tính $P = \frac{3 \cos^2 a + 2 \sin^2 a - 1}{\sin^2 a - 3 \cos^2 a + 5}$ biết $\tan a = -3$

LOẠI 5: Chứng minh một biểu thức cho không phụ thuộc x

17. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x:

$A = -3(\cos^4 x + \sin^4 x) + 2(\cos^6 x + \sin^6 x)$

$B = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2 \sin^6 x) + 6 \sin^4 x$

$C = 2(\cos^4 x + \sin^4 x + \sin^2 a \cdot \cos^2 a)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$ $D = 4(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos 4x$

$E = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin x + \cos x} + \sin x \cdot \cos x$

LOẠI 6: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn LG

18 Biểu diễn các cung sau trên đường tròn LG

a. $-\frac{5\pi}{4}$

b. 225^0

c. -765^0

d. $\frac{10\pi}{3}$

LOẠI 7: Bài toán trong tam giác

19 Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\sin(A+B) = \sin C$ b) $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ c) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$

d) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

Loại 7: CUNG (GÓC) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

$A + B = \pi - C$ (bù)	$\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ (phụ)
$\sin(A+B) = \sin C$ $\cos(A+B) = -\cos C$	$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$ $\tan\frac{A+B}{2} = \cot\frac{C}{2}$

20. Chứng minh rằng:

- 1) $\tan 10^0 \cdot \tan 20^0 \dots \tan 70^0 \cdot \tan 80^0 = 1$
- 2) $\cos 20^0 + \cos 40^0 \dots \cos 160^0 + \cos 180^0 = -1$
- 3) $\tan 50^0 + \tan 75^0 = \tan 230^0 + \tan 255^0$
- 4) $\cos 20^0 + \cos 40^0 = \sin 110^0 + \sin 130^0$
- 5) $\sin 25^0 + \sin 65^0 = \sin 155^0 + \sin 115^0$
- 6) $\sin 75^0 + \sin 65^0 + \cos 165^0 + \cos 205^0 = 0$
- 7) $\frac{\sin 168^0 - \sin 192^0}{\sin 78^0} \cot 12^0 = 2$

21. Tính giá trị biểu thức :

8) $A = \frac{\sin(-234^0) - \cos 216^0}{\sin 144^0 - \cos 126^0} \tan 36^0$

9) $B = \frac{(\cot 44^0 + \tan 226^0) \cos 406^0}{\cos 316^0} - \cot 17^0 \cdot \cot 73^0$

10) $C = \sqrt{\cot 5^0 \cot 10^0 \dots \cot 80^0 \cdot \cot 85^0}$

11) $D = \cos 10^0 + \cos 20^0 + \cos 30^0 + \cos 190^0 + \cos 200^0 + \cos 210^0$

12) $E = \frac{\cos\frac{9\pi}{5} - \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{11\pi}{5}}{\cos\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{6\pi}{5}} \tan\frac{16\pi}{5}$

22. Đơn giản biểu thức sau :

$$13) F = \sin(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot(2\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$14) G = \cos(\alpha - 5\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$15) H = \cot(\alpha - 2\pi) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 6\pi) - 2\sin(\alpha - \pi)$$

ÔN TẬP CHƯƠNG VI. LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a. $A = \sin 50^\circ \cos(-300^\circ)$ b. $B = \sin 215^\circ \tan(3\pi)$

c. $C = \cos \frac{4\pi}{5} \sin \frac{\pi}{3} \tan \frac{4\pi}{3} \cot \frac{9\pi}{5}$

Bài 2. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a. $\sin(\alpha + \pi/2)$ b. $\cos(\alpha - 45^\circ)$ c. $\cos(270^\circ - \alpha)$

d. $\cos(2\alpha + 90^\circ)$ e. $\sin(\alpha + 270^\circ)$

Bài 3. Cho tam giác ABC. Xét dấu của các biểu thức

a. $A = \sin A + \sin B + \sin C$ b. $B = \sin A \sin B \sin C$

c. $C = \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$ d. $D = \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}$

Bài 4. Cho biết một giá trị lượng giác, tính các giá trị lượng giác còn lại.

a. $\cos a = 4/5$; với $270^\circ < a < 360^\circ$. Tính $\sin a$, $\tan a$, $\cot a$

b. $\sin a = 5/13$; với $\pi/2 < a < \pi$. Tính $\cos a$, $\tan a$, $\cot a$

c. $\tan a = 3$; với $\pi < a < 3\pi/2$. Tính $\sin a$, $\cos a$, $\cot a$.

d. $\cot a = 2$; với $\pi < a < 3\pi/2$. Tính $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$.

e. Cho $\cos \alpha = -12/13$; và $\pi/2 < \alpha < \pi$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

f. Cho $\cot \alpha = 2$ và $0 < \alpha < \pi/4$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

g. Cho $\sin 2\alpha = -5/9$ và $\pi/2 < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

h. Cho $\cos 2\alpha = 5/13$ và $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

Bài 5. Cho biết một GTLG, tính giá trị của biểu thức

a. Tính $A = \frac{\cot a + \tan a}{\cot a - \tan a}$ với $\sin a = 3/5$ và $0 < a < \pi/2$

b. Tính $B = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 2\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + 4\cos^2 a}$ với $\cot a = -3$

c. Tính $C = \frac{\sin a + 5\cos a}{\sin^3 a - 2\cos^3 a}$ với $\tan a = 2$

d. Tính $D = \frac{\cot a + 3\tan a}{2\cot a + \tan a}$ với $\cos a = -2/3$

Bài 6. Cho $\sin a + \cos a = 5/4$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A = \sin a \cos a$ b. $B = \sin^3 a + \cos^3 a$

Bài 7. Cho $\tan a + \cot a = 5$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A = \tan^2 a + \cot^2 a$ b. $B = \tan^3 a + \cot^3 a$

Bài 8. Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = 3/4$. Tính $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$

Bài 9. Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = 1/2$. Tính $B = \sin^4 x + 3\cos^4 x$

Bài 10. Cho $5(\sin x + \cos x) = 1$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

Bài 11. Cho $\tan x + \cot x = 4$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$

[Type text]

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = \cos(\pi/2 + x) + \cos(3\pi + x) + \sin(x + \pi/2)$

b. $B = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin(7\pi/2 - x) + \tan(\pi + x)$

c. $C = 2\sin(\pi/2 + x) + \sin(5\pi - x) + \sin(3\pi/2 + x) + \cos(\pi/2 + x)$

d. $D = \cos(5\pi - x) - \sin(3\pi/2 + x) + \tan(3\pi/2 - x) + \cot(3\pi - x)$

e. $E = \frac{2\sin 2a - \sin 4a}{2\sin 2a + \sin 4a}$

Bài 13. Tính giá trị các biểu thức

a. $A = \frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$

b. $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

c. $C = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$

d. $D = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \dots + \sin 360^\circ$

Bài 14. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$

b. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x$

c. $\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cos^4 x$

d. $(\cot^2 x - \cos^2 x)(\tan^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x \sin^2 x$

e. $1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1 + \cos x)(1 + \tan x)$

f. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

g. $\frac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \cdot \frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \frac{1 + \tan^4 a}{\tan^2 a + \cot^2 a}$

h. $\frac{\sin a}{\sin a - \cos a} - \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} = \frac{1 + \cot^2 a}{1 - \cot^2 a}$

i. $1 - \frac{\sin^2 a}{1 + \cot a} - \frac{\cos^2 a}{1 + \tan a} = \sin a \cdot \cos a$

j. $\frac{\sin^2 a}{\sin a - \cos a} - \frac{\sin a + \cos a}{\tan^2 a - 1} = \sin a + \cos a$

Bài 15. Cho $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 a}{b} = \frac{1}{a+b}$ với $a, b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$

Bài 16. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

b. $B = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \cot^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \tan^2 x}$

c. $C = (x \sin a - y \cos a)^2 + (x \cos a + y \sin a)^2$

Bài 17. Chứng minh các biểu thức độc lập đối với x.

a. $A = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$

b. $B = \frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1}$

c. $C = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$

Bài 18. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a. $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$

b. $\cos(A+B-C) = -\cos 2C$

c. $\cos \frac{-3A+B+C}{2} = -\sin 2A$

d. $\tan \frac{A+B-2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$

Bài 19.

[Type text]

- a. Tính $\tan(\alpha + \pi/3)$ nếu $\sin \alpha = 3/5$ và $\pi/2 < \alpha < \pi$
 b. Tính $\cos(\pi/3 - \alpha)$ nếu $\sin \alpha = -12/13$ và $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$
 c. Tính $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\tan(a + b)$ biết $\sin a = 8/17$, $\tan b = 5/12$, $0 < a, b < \pi/2$.
 d. Tính $\tan a + \tan b$, $\tan a$, $\tan b$ nếu $0 < a, b < \pi/2$; $a + b = \pi/4$ và $\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$. Từ đó suy ra giá trị a và b .

Bài 20. Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau:

- a. $A = \sin^2 20^\circ + \sin^2 90^\circ + \sin^2 100^\circ + \sin^2 140^\circ$
 b. $B = \tan 20^\circ \tan 80^\circ + \tan 80^\circ \tan 140^\circ + \tan 140^\circ \tan 20^\circ$
 c. $C = \frac{\cot 225^\circ - \cot 79^\circ \cdot \cot 71^\circ}{\cot 259^\circ + \cot 251^\circ}$

d. $D = \tan 15^\circ + \cot 15^\circ$

Bài 21. Chứng minh

- a. $\tan x + \tan y = \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$
 b. $\tan x \tan(x + \frac{\pi}{3}) + \tan(x + \frac{\pi}{3}) \tan(x + \frac{2\pi}{3}) + \tan(x + \frac{2\pi}{3}) \tan x = -3$
 c. $\cos(x - \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{3})$
 d. $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 230^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ + \cos 380^\circ) = 0$
 e. $\tan x \cdot \tan 3x = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \cdot \tan^2 x}$

Bài 22. Chứng minh

- a. $2\tan a = \tan(a + b)$ nếu $\sin b = \sin a \cos(a + b)$
 b. $\tan a \tan b = -\frac{1}{3}$ nếu $\cos(a + b) = 2\cos(a - b)$

Bài 23. Cho tam giác ABC. Chứng minh

- a. $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B$ với $A, B \neq 90^\circ$.
 b. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ với ABC không là tam giác vuông
 c. $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$
 d. $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$
 e. $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$
 f. $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

Bài 24. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

- a. $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ với ABC nhọn
 b. $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$ với ABC nhọn
 c. $\tan(A/2) + \tan(B/2) + \tan(C/2) \geq \sqrt{3}$

Bài 25.

- a. Tính $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\tan 2x$ biết $\cos x = -5/13$; với $\pi < x < 3\pi/2$
 b. Tính $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\tan 2x$ nếu $\tan x = 2$

[Type text]

Bài 25. Tính giá trị của biểu thức.

a. $A = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$

b. $B = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

c. $C = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$

d. $D = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$

e. $E = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$

f. $F = \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}$

g. $G = \sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ \sin 85^\circ$

h. $H = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 30^\circ \dots \cos 70^\circ \cos 80^\circ$

i. $I = \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{5\pi}{15} \cos \frac{6\pi}{15} \cos \frac{7\pi}{15}$

j. $J = \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$

Bài 27. Chứng minh

a. $P = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3} \dots \cos \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n \cdot \sin \frac{a}{2^n}}$

b. $Q = \cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$

c. $R = \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{4\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$

Bài 28. Chứng minh các hệ thức:

a. $\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^3 x = \frac{1}{4} \sin 4x$

b. $\sin^6 \frac{x}{2} - \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \cos x (\sin^2 x - 4)$

c. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$

d. $\cot x + \tan x = \frac{2}{\sin 2x}$

e. $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \cos \frac{x}{8}$ với $0 < x < \pi/2$

Bài 29. Chứng minh:

a. $4\cos x \cos(\pi/3 - x) \cos(\pi/3 + x) = \cos 3x$

b. $4\sin x \sin(\pi/3 - x) \sin(\pi/3 + x) = \sin 3x$

Áp dụng tính:

$A = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ và $B = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Bài 30. Biến đổi thành tích:

a. $1 - 3 \tan^2 x$

b. $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$

c. $3 + 4 \cos 4x + \cos 8x$

d. $\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x$

e. $1 + \sin 2x - \cos 2x - \tan 2x$

f. $\cos 2x + \sin 2x + 1$

Bài 31. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = \frac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}$

b. $B = \frac{\sin 15x + 2\sin 12x + \sin 9x}{\cos 15x + 2\cos 12x + \cos 9x}$

$$c. C = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1}$$

Bài 32. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a. B = \tan \frac{\pi}{24} + \tan \frac{7\pi}{24}$$

$$b. B = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$$

$$c. C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

Bài 33. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a. A = \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30}$$

$$b. B = 16 \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ$$

$$c. C = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2}$$

$$d. D = 2(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7})$$

$$e. E = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$$

$$f. F = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$$

Bài 34. Chứng minh

$$a. \tan 20^\circ - \tan 40^\circ + \tan 80^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$b. \tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ.$$

Bài 35. Tính các tổng sau:

$$a. A = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha; \text{ với } \alpha \neq k\pi$$

$$b. B = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

$$c. C = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n}.$$

$$d. D = \frac{1}{\cos a \cdot \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cdot \cos 3a} + \dots + \frac{1}{\cos 4a \cdot \cos 5a} \text{ với } a = \pi/5$$

$$e. E = (1 + \frac{1}{\cos x})(1 + \frac{1}{\cos 2x})(1 + \frac{1}{\cos 3x}) \dots (1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}x})$$

$$\text{Bài 36. Tính } P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n}. \quad \text{ĐS: } \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

$$\text{Bài 37. Tính } S_n = \tan^2 \frac{a}{2} \cdot \tan a + 2 \tan^2 \frac{a}{2^2} \cdot \tan \frac{a}{2} + \dots + 2^{n-1} \tan^2 \frac{a}{2^n} \cdot \tan \frac{a}{2^{n-1}}$$

$$\text{ĐS: } S_n = \tan a - 2^n \tan \frac{a}{2^n}$$

Bài 38. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a. \frac{1 - 2\sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x}$$

$$b. \tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$$

[Type text]

c. $\tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \tan 4x \tan 6x$

d. $\frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x$

e. $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$

Bài 39. Cho $\sin(2a + b) = 5 \sin b$. Chứng minh: $\frac{2 \tan(a + b)}{\tan a} = 3$.

Bài 40. Cho $\tan(a + b) = 3 \tan a$. Chứng minh: $\sin(2a + 2b) + \sin 2a = 2 \sin 2b$.

Bài 41. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$

b. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

c. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

d. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

e. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$

Bài 42. Tìm các góc của tam giác ABC biết $B - C = \pi/3$ và $2 \sin B \sin C = 1$.

Bài 43. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔABC vuông là

a. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$ b. $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \cdot \sin C}$

Bài 44. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔABC cân tại C là $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{1}{2}(\tan A + \tan B)$

Bài 45. Chứng minh bất đẳng thức

a. $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ HD: cộng thêm $\sin(\pi/3)$

b. $\cos A + \cos B + \cos C \leq 3/2$ HD: cộng thêm $\cos(\pi/3)$

c. $8 \cos A \cos B \cos C \leq 1$ HD: Biến đổi $\cos A \cos B \cos C - 1/8$ về dạng hằng đẳng thức.

HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐIỂM ĐỐI XỨNG

Bài 1: Cho điểm $A(5;2)$ và đường thẳng $d: 3x+2y-6=0$

a) Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của A lên d

$H(2;0)$

b) Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua d

$A'(-1;-2)$

Bài 2:

a) Cho điểm $A(1;2)$ và $d: x+2y-1=0$. Tìm tọa độ A' đối xứng với A qua d

$A'\left(-\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$

b) Cho điểm $A(-2;1)$ và $d: 3x-y+2=0$. Tìm tọa độ A' đối xứng với A qua d

$A'(1;0)$

c) Cho điểm $A(3;2)$ và $d: x+2y-4=0$. Tìm tọa độ A' đối xứng với A qua d

$A'\left(\frac{9}{5};-\frac{2}{5}\right)$

d) Cho điểm $M(6;5)$ và $d: 2x+y-2=0$. Tìm tọa độ M' đối xứng với M qua d

$A'\left(\frac{9}{5};-\frac{2}{5}\right)$

e) Cho điểm $M(1;2)$ và $d: 4x-14y-29=0$. Tìm tọa độ M' đối xứng với M qua d

$A'\left(\frac{9}{5};-\frac{2}{5}\right)$

f) Cho điểm $M(1;-6)$ và $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \end{cases}$. Tìm tọa độ M' đối xứng với M qua d

$H(-2;0); M'(-5;6)$

Bài 3: Cho điểm $C(4;3)$ và đường thẳng $d: x+2y-5=0$ và điểm $A(9;-2)$. Gọi C' đối xứng với C qua d . Viết phương trình đường thẳng AC' Đ/s: $C'(2;-1); AC':x+7y+5=0$

Bài 4: $A(3;-3)$ và 2 đường thẳng $d_1: x+2y-2=0; d_2: 2x+6y-28=0$. Gọi B, C lần lượt là điểm đối xứng với A qua $d_1; d_2$. Viết phương trình đường thẳng qua B, C $4x-y-19=0$

Bài 5: $A(4;-1)$ và 2 đường thẳng $d_1: 2x-3y+12=0; d_2: 2x+3y=0$. Gọi B, C lần lượt là điểm đối xứng với A qua $d_1; d_2$. Viết phương trình đường thẳng qua B, C

Bài 6: $A(7;9), B(0;10); d_1: x+7y-20=0$. Gọi $A_1; B_1$ lần lượt là hai điểm đối xứng với A và B qua d . Viết phương trình đường thẳng $AB_1; A_1B$

Hd: $H_1(6;2); A_1(5;-5); H_2(-1;3); A_1(-2;-4); A_1B: 3x+y-10=0; AB_1: 13x-9y-10=0$

Bài 7: Cho tam giác $ABC, A(-1;0); B(2;3); C(3;-6)$ và đường thẳng $d: x-2y-3=0$. Tìm tọa độ điểm

1) $I \in d: IA+IB$ nhỏ nhất

2) $J \in d: IA+IC$ nhỏ nhất

3) $H \in d: |HA-HC|$ lớn nhất

4) $M \in d: |\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}|$ nhỏ nhất