

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình bậc hai, bậc ba, trùng phương đối với một hàm số lượng giác  
 $asin^2x + bsinx + c = 0, acos^2x + bcosx + c = 0, atan^2x + btanx + c = 0 (a \neq 0)$

Cách giải: đặt ẩn phụ đưa về dạng phương trình bậc hai  $at^2 + bt + c = 0$  rồi giải.

$asin^3x + bsin^2x + csinx + d = 0, acos^3x + bcos^2x + ccosx + d = 0, atan^3x + btan^2x + ctanx + d = 0 (a \neq 0)$

Cách giải: đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc 3 có dạng  $at^3x + bt^2x + ct + d = 0$ , đoán nghiệm và phân tích thành nhân tử đưa về phương trình tích.

$asin^4x + bsin^2x + c = 0, acos^4x + bcos^2x + c = 0, atan^4x + btan^2x + c = 0 (a \neq 0)$

Cách giải: tương tự như phương trình bậc hai.

2. Phương trình bậc nhất đối với sin và cos của cùng một cung lượng giác:  $a.sinx + b.cosx = c (ab \neq 0)$

Cách giải: chia hai vế cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$  rồi đặt  $cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  ta được phương trình sau

$$sin x cos \alpha - cos x sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx:  $a sin^2x + b sinx cosx + c cos^2x = d$

Cách giải 1: Xét  $cosx = 0$  rồi giải, sau đó xét  $cosx \neq 0$  và chia 2 vế phương trình cho  $cos^2x$  để đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai đối với tanx.

Cách giải 2: Hạ bậc đưa về dạng bậc nhất đối với  $sin2x$  và  $cos2x$ .

4. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx:  $a(sin x + cos x) + bsinxcosx = c$  hoặc  $a(sin x - cos x) + bsinxcosx = c$

Cách giải: đặt ẩn phụ  $t = sin x + cos x$  hoặc  $t = sin x - cos x$ , tính  $sinxcosx$  theo  $t$  rồi thay vào phương trình ta được phương trình bậc hai.

5. Phương trình đối xứng đối với tanx và cotx:  $atanx + bcotx + a^2tan^2x + b^2cot^2x = c$

Cách giải: đặt ẩn phụ  $t = atanx + bcotx$  suy ra  $a^2tan^2x + b^2cot^2x = t^2 - 2ab$  rồi đưa về phương trình bậc hai

6. Một số phương pháp giải phương trình lượng giác:

Phương pháp 1: Dùng các công thức lượng giác và phương pháp phân tích thành nhân tử đưa về phương trình dạng tích. Nếu có thể thì đoán nghiệm trước khi dùng để đưa về dạng tích dễ dàng hơn. Các nhân tử nếu có thường là một hàm lượng giác hoặc đa thức bậc nhất như  $asinx + b, acosx + b, atanx + b, asinx + bcosx + c, \dots$

Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ đưa phương trình lượng giác về phương trình đại số rồi giải hoặc dùng phối hợp phương pháp khác.

Phương pháp 3: Quy phương trình lượng giác về việc giải hệ phương trình lượng giác bằng cách đánh giá, so sánh, sử dụng bất đẳng thức. Thường trường hợp này phương trình lượng giác có nghiệm và được chứng minh không còn nghiệm khác. Hoặc chứng minh nghiệm của phương trình là trường hợp dấu bằng xảy ra khi so sánh hay sử dụng bất đẳng thức. Cách so sánh có thể dùng tính đơn điệu của hàm số và đôi khi cần đặt ẩn phụ rồi khảo sát hàm số.

Lưu ý: Các phương pháp thường được dùng kết hợp một cách linh hoạt và cần có kinh nghiệm giải để có cách đánh giá tốt nhất khi sử dụng phương pháp đặt trung. Phương trình thường không có dạng đặc trưng ngay từ đầu, khi đó phương trình cần có một số bước biến đổi đơn giản như quy đồng mẫu số, rút gọn, hạ bậc, chuyển vế, nhóm hạng tử, đồng nhất cung lượng giác, ...

**Bài tập vận dụng**

1.  $cos^3x + cos^2x + 2sinx - 2 = 0$

2.  $tanxsin^2x - 2sin^2x = 3(cos2x + sinxcosx)$

Gợi ý: chia hai vế cho  $cos^2x$

3.  $2sin3x - (1/sinx) = 2cos3x + (1/cosx)$

4.  $\frac{sin 2x}{1 + 2 sin x} + cos 2x - 2 cos x + 1 = 0$

5.  $4(sin3x - cos2x) = 5(sin x - 1)$

6.  $sinx - 4sin^3x + cosx = 0$

$$7. \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$8. \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x = \sin^3 4x \quad (1)$$

Gợi ý:  $\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3x)/4$ ,  $\cos^3 x = (3\cos x + \cos 3x)/4$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(3\sin x \cos 3x - \sin 3x \cos 3x + 3\cos x \sin 3x + \cos 3x \sin 3x) = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 4x = 4\sin^3 4x$$

$$9. \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x - 3\pi/2)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$$

$$10. \sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$$

$$11. 2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$$

$$12. \sin 2x + \cos 2x = 1 + \sin x - 3\cos x$$

$$13. 2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$$

$$14. 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos 2x = 0$$

$$15. \frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$$

$$16. \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\tan x + \cot x)$$

$$17. 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \tan x$$

$$18. \sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 8(\sqrt{3}\cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0$$

Gợi ý: phân tích thành nhân tử trong đó  $\sqrt{3}\cos x - \sin x$  là một nhân tử

$$19. \cos x = 8\sin^3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$20. \cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$$

$$21. 2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

$$22. \cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$$

$$23. \sqrt{25 - 4x^2}(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$$

$$24. \sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$$

$$25. \sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$$

$$26. \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$$

$$27. \tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

$$28. \tan 2x - \tan 3x - \tan 5x = \tan 2x \tan 3x \tan 5x$$

$$29. \cos \frac{4x}{3} = \cos^2 x$$

$$30. 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$31. 2\tan x + \cot 2x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$$32. \cos x \cot 3x = \cos 5x \cot x$$

33.  $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC TRONG CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC

1. Tìm nghiệm thuộc  $(0, 2\pi)$  của phương trình:  $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$  (A2002)

2. Giải phương trình:  $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$  (B2002)

3. Tìm nghiệm thuộc đoạn  $[0, 14]$  của phương trình:  $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$  (D2002)

4. Giải phương trình:  $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$  (A2003)

5. Giải phương trình:  $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$  (B2003)

6. Giải phương trình:  $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$  (D2003)

7. Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện  $\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos 2B + 2\sqrt{2}\cos 2C = 3$ . Tính ba góc của tam giác ABC. (A2004)

8. Giải phương trình:  $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$  (B2004)

9. Giải phương trình:  $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$  (D2004)

10. Tìm nghiệm thuộc  $(0, \pi)$  của phương trình:

$4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$  (Dự bị 1A 2005)

11. Giải phương trình:  $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$  (Dự bị 2A 2005)

12. Giải phương trình:  $\sin x \cos 2x + \cos^2 x (\tan^2 x - 1) + 2\sin^3 x = 0$  (Dự bị 1B 2005)

13. Giải phương trình:  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$  (Dự bị 2B 2005)

14. Giải phương trình:  $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$  (Dự bị 1D 2005)

15. Giải phương trình:  $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$  (Dự bị 2D 2005)

16. Giải phương trình:  $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$ . (A2005)

17. Giải phương trình:  $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ . (B2005)

18. Giải phương trình:  $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$ . (D2005)

19. Giải phương trình:  $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$  (A2006)

20. Giải phương trình:  $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4$  (B2006)

21. Giải phương trình:  $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$ . (D2006)

22. Giải phương trình:  $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$ . (Dự bị 1D 2006)

23. Giải phương trình:  $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$ . (Dự bị 2D 2006)

24. Giải phương trình:  $(2\sin^2 x - 1)\tan^2 x + 3(\cos^2 x - 1) = 0$  (Dự bị 1B 2006)

25. Giải phương trình:  $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$  (Dự bị 2B 2006)

26. Giải phương trình:  $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$ . (Dự bị 3D 2006)

27. Giải phương trình:  $\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$  (Dự bị 1A 2006)

28. Giải phương trình:  $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$  (Dự bị 2A 2006)

29. Giải phương trình:  $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$  (B2007)
30. Giải phương trình:  $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$  (D2007)
31. Giải phương trình:  $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$  (A2007)
32. Giải phương trình:  $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$  (Dự bị B 2007)
33. Giải phương trình:  $2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \cos x \sin x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$  (Dự bị 1A 2007)
34. Giải phương trình:  $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot 2x$  (Dự bị 2A 2007)
35. Giải phương trình:  $\sin 3x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 2x$ . (CĐ 2008)
36. Giải phương trình:  $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos 2x$  (D2008)
37. Giải phương trình:  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$  (B2008)
38. Giải phương trình:  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x - 3\pi/2)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$  (A2008)
39. Giải phương trình:  $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$  (A2009)
40. Giải phương trình:  $\sin x + \sin 2x \cos x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$  (B2009)
41. Giải phương trình:  $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$  (D2009)
42. Giải phương trình:  $(1 + 2\sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$  (CĐ 2009)
43. Giải phương trình:  $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin(x + \pi/4)}{1 + \tan x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$  (A2010)
44. Giải phương trình:  $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$  (B2010)
45. Giải phương trình:  $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$  (D2010)
46. Giải phương trình:  $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$  (A2011)
47. Giải phương trình:  $\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$  (B2011)
48. Giải phương trình:  $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$  (D2011)
49. Giải phương trình:  $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$  (CĐ 2011)
50. Giải phương trình:  $4\cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8\sin x - 1)\cos x = 5$  (CĐ 2010)
51. Giải phương trình:  $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$  (AA1 2012)
52. Giải phương trình:  $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$  (B 2012)
53. Giải phương trình:  $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$  (D 2012)
54. Giải phương trình:  $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  (AA1 2013)
55. Giải phương trình:  $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$  (B 2013)
56. Giải phương trình:  $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$  (D 2013)
57. Giải phương trình:  $\cos(\pi/2 - x) + \sin 2x = 0$  (CĐ 2013)