Câu 1: Cho hàm số y = $\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y$ =3. Mệnh đề nào sau đây đúng ? A. m < –1 B. 3< m ≤ 4 C. m > 4 D. 1 ≤ m <3

Phân tích và giải:Hàm liên tục trên [2;4] , có y' = $\frac{-1-m}{(x-1)^2}$

Nếu m = –1 thì y = 1 ∀ x ≠1 ⇒ $\min\limits_{[2;4]} y$ = 1 (!)

Nếu m < –1 thì y'>0 ∀ x ≠1 ⇒ $\min\limits_{[2;4]} y$ = y(2) = 2+m

$\min\limits_{[2;4]} y$ =3 ⇒ 2+m =3 ⇒ m =1 (loại)

Nếu m >–1 thì y'<0 ∀ x ≠1 ⇒ $\min\limits_{[2;4]} y$ = y(4) = $\frac{4+m}{3}$

$\min\limits_{[2;4]} y$ =3 ⇒ $\frac{4+m}{3}$ =3 ⇒ m = 5 (thỏa). Chọn C.

Chú ý : Nếu là xác định m để $\min\limits_{[2;4]} y$ =1 thì vẫn có giá trị m = –1 (giá trị duy nhất) thỏa ycbt.

Câu 2: Cho hàm số y = $\frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ? A. m ≤ 0 B. m > 4 C. 0< m ≤ 2 D. 2 ≤ m <4

Phân tích và giải:Hàm liên tục trên [2;4] , có y' = $\frac{1-m}{(x+1)^2}$

Nếu m = 1 thì y = 1 ∀ x ≠–1 ⇒ $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = 2$(!)

Nếu m ≠1 thì $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$ ⇔ y(1) + y(2) = $\frac{16}{3}$ ⇔ $\frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{6}m = \frac{25}{6} \Leftrightarrow m = 5$

Chọn B.

Nhận xét : Trong 2 câu 1,2 thì câu 2 có điều kiện phức tạp hơn nhưng lại đơn giản hơn vì không phải xét nhiều trường hợp.

Câu 3: Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2\frac{1-ab}{a+b}$ = 2ab +a+b –3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P = a+2b

A. minP = $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$ B. minP = $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$ C. minP = $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$ D. minP = $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$

Phân tích và giải:

Việc đầu tiên là từ điều kiện ràng buộc phức tạp giữa a và b, ta biến đổi điều kiện này , hy vọng có một ràng buộc mới giữa a và b đơn giản hơn.

Điều kiện : ab <1. Viết lại đẳng thức $\log_2\frac{1-ab}{a+b}$ = 2ab +a+b –3 ở dạng cân đối hơn.

$\log_2(1-ab) - \log_2(a+b) = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2(1-ab) + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + a + b - 1$

$\Leftrightarrow \log_2(1-ab) + 2(1-ab) = \log_2(\frac{a+b}{2}) + 2(\frac{a+b}{2})$ (1)

Hàm f(x) = $\log_2 x$ +2x là đồng biến trên (0,+ ∝)

(1) viết lại : f(1-ab) = f($\frac{a+b}{2}$) $\Rightarrow$ 1-ab = $\frac{a+b}{2}$ (2)

Xác lập được đẳng thức (*), khi đó ta có P là biểu thức theo 1 biến ,biến b chẳng hạn .

(*) $\Rightarrow$ 2 –b = a(1+2b) $\Rightarrow$ a= $\frac{2-b}{1+2b}$. Khi đó : P = $\frac{2-b}{1+2b}$ +2b = g(b) (0<b<2)

g'(b) = $\frac{-5}{(1+2b)^2}+2=0 \Rightarrow (1+2b)^2=\frac{5}{2} \Rightarrow 1+2b=\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{10}-2}{4}$

min g(b) = g $\left(\frac{\sqrt{10}-2}{4}\right)=\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. Chọn A.

<u>Nhận xét :</u> Mặc dầu đã có định hướng đầu tiên nhưng bạn thấy đấy để có (*) thật không đơn giản chút nào, nó đòi hỏi 1 sự khéo nhất định.

<u>Câu 4:</u> Xét hàm số f(t) = $\frac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho f(x)+f(y) =1 với mọi x,y thỏa mãn e $^{x+y}\le$ e(x+y) (*) . Tìm số phần tử của S.

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

<u>Phân tích và giải:</u>

Từ dữ kiện " phức tạp" e $^{x+y}\le$ e(x+y) (*) ta hy vọng xác lập một dữ kiện mới tương đương và đơn giản hơn.

Từ (*) ta có x+y >0. Xét hàm số g(t) = e^t–et với t>0.

Xác lập g(t) $\ge$ g(1) =0 $\forall$ t >0 $\Rightarrow$ e^t $\ge$ et $\forall$t >0 (dấu = xảy ra khi t=1)

Suy ra $\forall$ x,y thì e$^{x+y}\le$ e(x+y) $\Leftrightarrow$ x+y =1

Ycbt $\Leftrightarrow$ Tìm số các giá trị m sao cho f(x) + f(y) =1 với x+y=1.

Với x+y =1, ta có: f(x) + f(y) =1 $\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ m^4 =9 $\Rightarrow$ m = $\pm\sqrt{3}$ - Chọn B.

<u>Chú ý:</u> Có thể đặt lại bài toán: "Xét hàm số f(t) = $\frac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho f(x)+f(y) =1 với mọi x,y ≤ 0 thỏa mãn e$^{x+y}\le$ e(x+y) +1 . Tìm số phần tử của S.

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

Xét hàm số g(t) = e^t–et –1, $\forall$ t $\le$ 0

Xác lập e^t $\le$ et +1, $\forall$ t $\le$ 0 $\Leftrightarrow$ g(t) $\le$ 0, $\forall$ t $\le$ 0 $\Leftrightarrow$ t=0

Suy ra $\forall$ x,y $\le$ 0 , e$^{x+y}\le$ e(x+y) +1 $\Leftrightarrow$ x = y = 0– khi đó:

với x = y = 0, 1= f(x) + f(y) = 2f(0) $\Leftrightarrow$ m^2=1 $\Leftrightarrow$ m= $\pm$ 1. Chọn C.

<u>Câu 5 :</u> Cho F(x) = $-\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$.

Tìm nguyên hàm của hàm số f'(x)lnx.

A. $\int f'(x).\ln x\,dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$ B. $\int f'(x).\ln x\,dx=-\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$

C. $\int f'(x).\ln x\,dx=\frac{\ln x}{x^3}-\frac{1}{5x^5}+C$ D. $\int f'(x).\ln x\,dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{5x^5}+C$

<u>Phân tích và giải:</u> $\int f'(x).\ln x\,dx=\int \ln x.\,f'(x)dx$ có dạng $\int u.v'dx$ với $u=\ln x;\ v'=f'(x)$

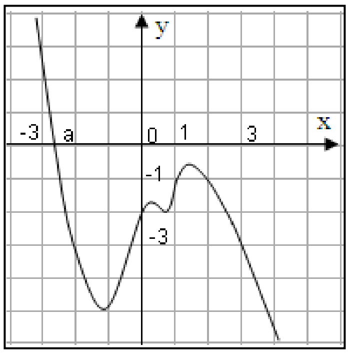
Sử dụng tích phân từng phần $\int f'(x).\ln x\,dx=\ln x.f(x)-\int\frac{f(x)}{x}dx=\ln x.f(x)+\frac{1}{3x^3}+C$ (*)

Tính f(x).

Trở lại giả thiết ta có F'(x) = $\frac{f(x)}{x}$ $\Rightarrow \frac{1}{x^4}=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^3}$ (**)

(*)(**) $\Rightarrow \int f'(x).\ln x\,dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. Chọn A.

Nhận xét: Đây là câu hỏi đòi hỏi bạn phải có nhiều kiến thức, kĩ năng, tư duy linh hoạt. Phải biết đề xuất và xử lí bước đầu tiên, bước tiếp theo.



Câu 6 : Cho hàm số y = f(x). Đồ thị hàm số y = f ’(x) như hình bên. Đặt g(x) = 2f(x) +x^2 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. g(1)<g(3)<g(−3) B. g(−3)<g(3)<g(1)

C. g(3)<g(−3)<g(1) D. g(1)<g(−3)<g(3)

Phân tích và giải:

g(x) = 2f(x) +x^2 $\Rightarrow$ g’(x) = 2 (f ’(x) +x) = 2 [f ’(x) − (−x)]

* Trên [1,3] thì f ’(x) > −x (xem hình dưới đây)

$\Rightarrow$ g’(x) $\geq$ 0 trên [1,3] $\Rightarrow$ g(3) > g(1)

* Ta có: g(3) −g(−3) = 2[f(3) − f(−3)]

Trên [−3,3] thì f ’(x) =0 chỉ tại mỗi một điểm x = a.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f ’(x) , x =−3 , x = a và trục Ox.

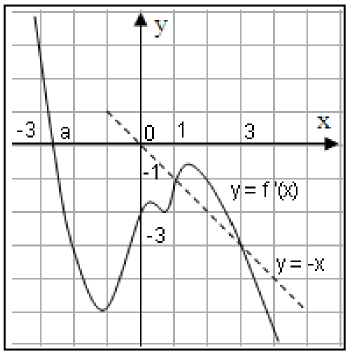
S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f ’(x) , x = a , x = 3 và trục Ox.

Ta có: $S_1 < S_2$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{a} f'(x)dx < \int_{a}^{3} -f'(x)dx \Rightarrow f(a) - f(-3) < f(a) - f(3)$$

$$\Rightarrow f(3) < f(-3) \Rightarrow g(3) < g(-3)$$

Vậy g(1)<g(3)<g(-3)- Chọn A.



Chú ý : Khi xét đến hiệu H(b) −H(a), ta liên tưởng đến ý nghĩa hình học của tích phân.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn giữa các đường y = h(x), y=0, x=a, x =b (a<b) trong đó h(x) liên tục và không âm (hoặc không dương trên [a,b]) .Thế thì S = H(b) −H(a) hoặc S = H(a) −H(b).

Câu 7: Xét khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. SA ⊥ mp(ABC). Khoảng cách từ A đến mp(SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa 2 mp(SBC) và (ABC). Tính cos α khi thể tích khối chóp SABC nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

Phân tích và giải:Tính lần lượt AK , AS và V_{SABC} theo α. (Bạn tự vẽ hình)

$AK = \frac{AH}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha}$; AS =AK.tan α = $\frac{3}{\cos\alpha}$. $V_{SABC} = \frac{1}{3}.AK^2.AS = \frac{1}{3}.\frac{9}{\sin^2\alpha}.\frac{3}{\cos\alpha}$

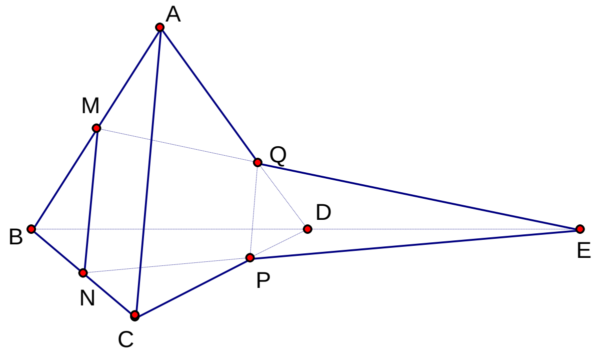
V nhỏ nhất khi $\sin^2\alpha.\cos\alpha$ lớn nhất hay $\sin^4\alpha$ x.cos $^2\alpha$ lớn nhất

$\sin^4 x.\cos^2 x = \frac{\sin^2\alpha}{2}.\frac{\sin^2\alpha}{2}\cos^2\alpha$

$\sin^4\alpha.\cos^2\alpha$ lớn nhất khi $\frac{\sin^2\alpha}{2} = \cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện ABCD thành 2 khối đa diện trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. V=$\frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$ B. V=$\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$ C. V=$\frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$ D. V=$\frac{\sqrt{2}a^3}{18}$



Phân tích và giải:$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

(Chú ý P, Q là các trọng tâm Δ BCE, ABE)

$$\frac{V_{EDPQ}}{V_{EBNM}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow V_{DPQBNM} = \frac{7}{9}V_{EBNM}$$

$$= \frac{7}{9}.\frac{1}{4}V_{EBAC} = \frac{7}{9}.\frac{1}{4}.2V_{DBAC} = \frac{7}{18}V_{DBAC}$$

$$\Rightarrow V_{AQMCPN} = \frac{7}{18}V_{DBAC} = \frac{7}{18}\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{7a^3\sqrt{2}}{216}$$

Chọn A.

Nhận xét: Giải là ngắn gọn vậy nhưng đòi hỏi bạn phải có những kiến thức cơ bản – vận dụng chúng thích hợp.

Tứ diện đều cạnh a có chiều cao là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Công thức tỉ thể tích 2 khối chóp tam giác có cùng chiều cao (hoặc có cùng diện tích đáy)

Công thức tỉ thể tích 2 khối chóp tam giác theo tỉ các cạnh tương ứng...

Câu 9: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2=9$, điểm M(1;1;2) và mặt phẳng (P): x+y+z –4=0. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, thuộc (P) và cắt (S) tại 2 điểm A,B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}$ = (1;a;b).Tính T = a-b

A. T= –2 B. T= 1 C. T= –1 D. T=0.

Phân tích và giải:Mặt cầu (S) có tâm O (0 ;0 ;0) và bán kính R =3.

M là điểm trong của mặt cầu (S) ⇒ Δ qua M cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm A,B

Gọi H lần lượt là hình chiếu của O lên Δ (H thay đổi khi Δ thay đổi.)

Dự đoán r nhỏ nhất khi H trùng với M – khi đó $\vec{u} \perp \overrightarrow{OM}$ mặt khác $\vec{u} \perp \vec{n}_{(P)}$ suy ra:

1+a+2b=0 và 1+a+b=0 ⇒ b=0 và a =–1 ⇒ T=–1. Chọn C.

Câu 10: Trong không gian Oxyz cho hai điểm A(3;–2;6) B(0;1;0) và mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2 + (z-3)^2=25$. Mặt phẳng (P): ax + by + cz –2=0 đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất . Tính T = a + b + c.

A. T=4 B. T= 5 C. T=3 D. T=2.

Phân tích Mặt cầu (S) có tâm I(1 ;2 ;3) và bán kính R =5.

B là điểm trong của mặt cầu (S) ⇒ mp (P) qua B cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của I lên (P) và AB (K cố định , H thay đổi khi (P) thay đổi.)

Dự đoán r nhỏ nhất khi H trùng với K – khi đó $\overrightarrow{IK}$ là véc tơ pháp của mp(P).

Viết phương trình mp(P) ⇒ T = a + b + c.

Giải: Xác định K(1,0,2) ⇒ $\overrightarrow{IK} = (0;-2;-1)$

Mp(P) : –2y–z + d =0. B ∈ (P) ⇒ –2 + d =0 ⇒ d = 2

(P): –2x –z +2=0 hay 2y +z –2 =0 ⇒ a + b+c = 3. Chọn C.

Chú ý : Bạn rất dễ nhầm lẫn rằng do B là điểm trong của mặt cầu (S) (A là điểm nằm ngoài (S)) – dự đoán r nhỏ nhất khi H trùng với B. Mp(P) lúc này qua B, có $\overrightarrow{IB}$ là véc tơ pháp và (P) không qua A (!)