CHUYÊN ĐỀ : KHẢO SÁT HÀM SỐ
Bài 1 : SỰ ĐỒNG BIẾN , NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Các kiến thức cần nhớ :

1. Định nghĩa : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K

**** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nếu*** $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

**** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K nếu*** $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Chú ý : K là một khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng

2. Định lý : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K

a) Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ ***thì hàm số*** $f(x)$ ***đồng biến trên K***

b) Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ ***thì hàm số*** $f(x)$ ***nghịch biến trên K***

3. Định lý mở rộng : Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

a) Nếu $f'(x) \ge 0,\ \forall x \in K$ ***và*** $f'(x) = 0$ ***chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K***

b) Nếu $f'(x) \le 0,\ \forall x \in K$ ***và*** $f'(x) = 0$ ***chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K***

c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ ***thì*** $f(x)$ ***không đổi trên K***

Các dạng toán thường gặp

Dạng 1 : Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Quy tắc :

+ Tìm tập xác định của hàm số

+ Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định

+ Lập bảng biến thiên

+ Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số

Ví dụ 1: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2016$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -1)$ **B.** $(-1; 1)$ **C.** $(-1; 0)$ **D.** $(-\infty; 1)$

Giải:

Ta có: $y = x^4 - 2x^2 + 2016 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1),(0;1)$. Suy ra đáp án A đúng.

Ví dụ 2: Hàm số $y=-x^4+2x^3-2x-1$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;+\infty)$

Giải:

Ta có $y'=-4x^3+6x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y’		+	0	-	0	-	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{5}{16}$		$\searrow$		$-\infty$

Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Bài tập:

Câu 1. Hàm số $y=-x^3+3x^2-1$ đồng biến trên các khoảng:

A. $(-\infty;1)$ B. $(0;2)$ C. $(2;+\infty)$ D. R.

Câu 2. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^3-3x-1$ là:

A. $(-\infty;-1)$ B. $(1;+\infty)$ C. $(-1;1)$ D. $(0;1)$.

Câu 3. Hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng:

A. $(-\infty;1)$;$(1;+\infty)$ B. $(1;+\infty)$ C. $(-1;+\infty)$ D. R\ $\{1\}$.

Câu 4. Các khoảng đồng biến của hàm số $y=2x^3-6x$ là:

A. $(-\infty;-1)$; $(1;+\infty)$ B. $(-1;1)$ C. $[-1;1]$ D. $(0;1)$.

Câu 5. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y=2x^3-6x+20$ là:

A. $(-\infty;-1);(1;+\infty)$ B. $(-1;1)$ C. $[-1;1]$ D. $(0;1)$.

Câu 6. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^3-x^2+2$ là:

A. $(-\infty;0)$; $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ B. $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ C. $(-\infty;0)$ D. $(3;+\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số: $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-5$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề ***sai***:

A. f(x) giảm trên khoảng $(-3;-1)$ **B.** f(x) tăng trên khoảng $(-1;1)$

C. f(x) giảm trên khoảng $(5\ ;10)$ **D.** f(x) giảm trên khoảng $(-1;3)$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

A. f(x) giảm trên khoảng $(-2;0)$ **B.** f(x) tăng trên khoảng $(-1;1)$

C. f(x) tăng trên khoảng $(2\ ;5)$ **D.** f(x) giảm trên khoảng $(0\ ;2)$

Câu 9. Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ là:

A. $(-\infty;-2)$; $(2;+\infty)$ **B.** $(-2;2)$ **C.** $(-\infty;-2)$ **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 10. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ là:

A. $(-\infty;1)$; $(3;+\infty)$ **B.** $(1;3)$ **C.** $[-\infty;1]$ **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 11. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $\mathbb{R}$

Câu 12. Khoảng đồng biến của $y = -x^4 + 2x^2 + 4$ là: Hãy chọn câu trả lời đúng nhất

A. $(-\infty; -1)$ **B.**$(3;4)$ **C.**$(0;1)$ **D.** $(-\infty; -1)$; $(0; 1)$.

Câu 13. Hàm số $y = \dfrac{x}{x-2}$ nghịch biến trên khoảng nào? Hãy chọn câu trả lời đúng nhất.

A. $(-\infty; 2)$ **B.** $(2; +\infty)$;

C.Nghịch biến trên từng khoảng xác định **D**. Đáp án khác

Câu 14. (Chọn câu trả lời đúng nhất). Hàm sô $y = x^4 - 12x^3$ nghịch biến trên:

A. $(-\infty; 0)$ **B.**$(0; 9)$ **C.**$(9; +\infty)$ **D.**$(-\infty; 9)$

Câu 15. Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là

A.$(0;3)$ **B.**$(2;4)$ **C.**$(0; 2)$ **D**. Đáp án khác

Dạng 2 : Tìm giá trị của m để hàm số đơn điệu trên K cho trước

Phương pháp : Xét hàm số $y = f(x)$ trên K

✶ Tính $f'(x)$

✶ Nêu điều kiện của bài toán :

+ Hàm số đồng biến trên K $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in K$

+ Hàm số nghịch biến trên K $\Leftrightarrow f'(x) \le 0, \forall x \in K$

✶ Từ điều kiện trên sử dụng các kiến thức về dấu của nhị thức bậc nhất, tam thức bậc hai để tìm m

➢ CHÚ Ý : Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \ne 0)$

◆ $f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

◆ $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

Xét bài toán: "Tìm m để hàm số y = f(x,m) đồng biến trên K". Ta thực hiện theo các bước sau:

B1. Tính đạo hàm f'(x,m).

B2. Lý luận:

Hàm số đồng biến trên K $\Leftrightarrow f'(x,m) \ge 0,\ \forall x \in K$

$\Leftrightarrow m \ge g(x), \forall x \in K \ (m \le g(x))$

B3. Lập BBT của hàm số g(x) trên K. Từ đó suy ra giá trị cần tìm của tham số m.

Ví dụ 1: Với giá trị nào của m, hàm số $f(x) = mx^3 - 3x^2 + (m-2)x + 3$ nghịch biến trên R ?

Giải:

TXĐ: R

Ta có: $f'(x) = 3mx^2 - 6x + m - 2$

Hàm số nghịch biến trên R khi và chỉ khi $f'(x) = 3mx^2 - 6x + m - 2 \le 0, \forall x \in R$

- m = 0, khi đó f'(x) = $-6x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{3}$: không thỏa $\forall x \in R$.
- $m \ne 0$, khi đó $f'(x) \le 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 9 - 3m(m-2) \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 + 6m + 9 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \le -1 \text{ v } m \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1$$

Vậy, với $m \le -1$ thì thỏa mãn bài toán.

***Ví dụ 2*:** Định m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Giải:

TXĐ: $D = R \setminus \{-m\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{m^2 - 1}{(x+m)^2}$. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi

$y' > 0, \forall x \ne -m \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \text{ v } m > 1$

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Giải:

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số đồng trên $[2;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \ge 2 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \ge 0, \forall x \ge 2$

$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6 \ge 0, \forall x \ge 2 \Leftrightarrow m \ge \frac{6-2x}{x^2 - 2x + 3}, \forall x \ge 2$ (vì $x^2 - 2x + 3 > 0$)

Bài toán trở thành:

Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{6-2x}{x^2 - 2x + 3} \le m, \forall x \ge 2$

Ta có $f'(x)=\dfrac{2x^2-12x+6}{\left(x^2-2x+3\right)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-12x+6=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{6}$

BBT:

x	2		$3+\sqrt{6}$		$+\infty$
f'(x)			0		
f(x)	$\frac{2}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$	0

Ta cần có: $\max\limits_{[2;+\infty)} f(x)\le m\Leftrightarrow m\ge\dfrac{2}{3}$. Đó là các giá trị cần tìm của tham số m.

Ví dụ 4: Định m để hàm số $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$. Nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

Giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=3x^2+6x+m+1$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x+m+1\le 0,\forall x\in(-1;1)$ (1)

Xét BPT (1): (1) $\Leftrightarrow m\le -3x^2-6x-1=g(x)$

Xét hàm số $g(x),\ x\in(-1;1)$

Có: $g'(x)=-6x-6\le 0,\ \forall x\in(-1;1)$

BBT:

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-10

Từ BBT suy ra $m\le g(x),\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow m\le -10$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)\Leftrightarrow m\le -10$

Bài tập:

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{mx^2}{2}+2x+2016$. Với giá trị nào của m, hàm luôn đồng biến trên tập xác định

A . $m=2\sqrt{2}$ **B .** $|m|\le 2\sqrt{2}$

C . $m\le -2\sqrt{2}\vee m\ge 2\sqrt{2}$ **D.** Một kết quả khác

Câu 2: Giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định là:

A. $-2<m<2$. **B.** $-2<m\le -1$ **C.** $-2\le m\le 2$ **D.** $-2\le m\le 1$

Câu 3. Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+1)x^2-(m+1)x+2$ đồng biến trên tập xác định của nó khi:

A. $m>4$ **B.** $-2\le m\le -1$ **C.** $m<2$ **D.** $m<4$

Câu 4. Với giá trị nào của m thì hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-mx+2$ nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $m\ge 4$ **B.** $m\le 4$ **C.** $m>4$ **D.** $m<4$

Câu 5. Hàm số $y=-x^3+mx^2-m$ đồng biến trên (1;2) thì m thuộc tập nào sau đây:

A. $[3;+\infty)$ **B.** $(-\infty;3)$ **C.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$ **D.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$

Câu 6. Giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$ là:

A. $-2<m<2$ **B.** $-2<m\le -1$ **C.** $-2\le m\le 2$ **D.** $-2\le m\le 1$

Câu 7. Cho hàm số $y=x^3-x^2+3mx-1999$. Với giá trị nào của m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

A.m<1/9 **B.** $m\le 1/9$ **C.**Không có m **D.**Đáp án khác

Câu 8. Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

A.m<1 **B.**m>-2 **C.**m<-2 **D.**đáp án khác

Câu 9. Hàm số $y=x^3-mx^2+3x-1$ luôn đồng biến khi

A. $-3<m\le 3$ **B.** $-2\le m\le 2$ **C.** $-3\le m\le 3$ **D.**cả a,b,c đều đúng

Câu 10. Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-1)x^2+2(m-1)x-2$ luôn tăng khi

A.Không có m **B.** $1\le m\le 3$ **C.** $0\le m\le 3$ **D.**cả a,b,c đều đúng

Câu 11. Hàm số $y=\dfrac{x+m}{mx+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định khi

A.-1<m<1 **B.** $-1\le m\le 1$ **C.**Không có m **D.**Đáp án khác

Quy tắc tính đạo hàm: Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$; C : là hằng số.

Tổng, hiệu: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Tích: $(u.v)' = u'.v + v'.u \Rightarrow (C.u)' = C.u'$.

Thương: $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C.u'}{u^2}$

Đạo hàm hàm hợp: Nếu $y = f(u)$, $u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.

Bảng công thức tính đạo hàm:

Đạo hàm của hàm sơ cấp	**Đạo hàm của hàm hợp**
$(C)' = 0$ (C là hằng số).	$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(u \neq 0)$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$	$(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a\|x\|)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a\|u\|)' = \frac{u'}{u.\ln a}$