TÓM TẮT KIẾN THỨC TOÁN LỚP 10

BẤT ĐẲNG THỨC & BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. Bất Đẳng Thức:

1. Bất đẳng thức có dạng: $A > B$, $A < B$, $A \geq B, A \leq B$.

2. Bất đẳng thức hệ quả: Nếu mệnh đề $A < B \Rightarrow C < D$ đúng thì ta nói BĐT C < D là BĐT hệ quả của BĐT A < B.

3. Bất đẳng thức tương đương: Nếu BĐT A < B là hệ quả của BĐT C < D và ngược lại thì ta nói hai BĐT tương đương nhau. Kí hiệu: $A < B \Leftrightarrow C < D$.

4. Các tính chất:

Tính chất		**Tên gọi**
Điều kiện	**Nội dung**	
	$a < b$ và $b < c \Rightarrow a < c$	Bắc cầu
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế bất đẳng thức với một số.
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0$, $c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức

		cùng chiều
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng lên một lũy thừa.
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$	
A > 0	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức.
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

5. Bất đẳng thức Côsi: Cho hai số a và b không âm:

Ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

6. Các hệ quả:

i) $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$

ii) Cho hai số x > 0, y > 0. Nếu x + y không đổi thì x.y lớn nhất khi và chỉ khi x = y.

iii) Cho hai số x > 0, y > 0. Nếu x.y không đổi thì x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

7. Bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối:

i) $|x| \ge 0, |x| \ge x, |x| \ge -x$

ii) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a,\ \forall a > 0$

iii) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a \text{ hoac } |x| \ge a,\ \forall a > 0$

iv) $|a| - |b| \le |a+b| \le |a| + |b|$

8. Các phương pháp chứng minh BĐT:

i) Dùng định nghĩa: Muốn chứng minh A > B thì ta cần chứng minh:

A – B > 0.

ii) Phương pháp chứng minh tương đương:

$A > B \Leftrightarrow A_1 > B_1 \Leftrightarrow A_2 > B_2 \Leftrightarrow ...... \Leftrightarrow A_n > B_n$.

Trong đó: A > B là bđt cần chứng minh

$A_n > \mathbf{B_n}$ là bđt đúng đã biết.

iii) Dùng các bất đẳng thức đã biết: BĐT Côsi, BĐT chứa giá trị tuyệt đối…

II. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn:

1. Khái niệm bất phương trình một ẩn:

Bất phương trình ẩn x có dạng: f(x) < g(x), $f(x) \le g(x), f(x) > g(x), f(x) \ge g(x)$.

Trong đó f(x) và g(x) là những biểu thức chứa x.

2. Điều kiện của bất phương trình: là điều kiện của ẩn x để hai vế f(x) và g(x) đều có nghĩa.

TXĐ: $D = \{x \in R / f(x), g(x) \text{ có nghĩa}\}$

3. Hệ bất phương trình một ẩn: Là hệ gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Phương pháp giải hệ bất phương trình: Giải từng bất phương trình rồi **lấy giao của các tập nghiệm**.

4. Bất phương trình tương đương: Hai bất phương trình (hệ bất phương trình) được gọi là tương đương nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm. Kí hiệu: $\Leftrightarrow$

5. Các phép biến đổi tương đương: Cho bất phương trình P(x) < Q(x) có TXĐ D.

a) Phép cộng (trừ): Nếu f(x) xác định trên D thì:

$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$

b) Phép nhân (chia):

i) Nếu $f(x) > 0, \forall x \in D$ thì: $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x)$

ii) Nếu $f(x) < 0, \forall x \in D$ thì: $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x)$

c) Phép bình phương: Nếu $P(x) \geq 0$, $Q(x) \geq 0, \forall x \in D$ thì:

$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x)$

6. Các chú ý khi giải bất phương trình:

i) Khi biến đổi hai vế của bất phương trình thì có thể làm thay đổi điều kiện của bất phương trình. Vì vậy, để tìm nghiệm của bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thoả mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.

VD: Giải bpt: $\frac{5x+2\sqrt{3-x}}{4}-1>\frac{x}{4}-\frac{4-3\sqrt{3-x}}{6}$.

ii) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình với biểu thức f(x) ta cần lưu ý về dấu của f(x). Nếu f(x) nhận cả giá trị dương lẫn âm thì ta phải lần lượt xét cả hai trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến một hệ bất phương trình.

iii) Khi giải bất phương trình có ẩn ở mẫu ta ***quy đồng mẫu nhưng không được bỏ mẫu*** *và* ***phải xét dấu biểu thức để tìm tập nghiệm***

VD: Giải bpt: $\frac{1}{x-1}\geq 1$

iv) Khi giải bất phương trình P(x) < Q(x) mà phải bình phương hai vế thì phải xét hai trường hợp:

TH1: P(x) và Q(x) đều không âm thì ta bình phương hai vế của bất phương trình.

TH2: P(x) và Q(x) đều âm thì ta viết P(x) < Q(x) ⇔ - Q(x) < - P(x) rồi bình phương hai vế của bất phương trình mới.

VD: Giải bpt: $\sqrt{x^2+\frac{17}{4}}>x+\frac{1}{2}$

III. Dấu của nhị thức bậc nhất:

1. Nhị thức bậc nhất: Là biểu thức có dạng: f(x) = ax + b. trong đó a, b là các hằng số ($a \neq 0$).

2. Dấu của nhị thức bậc nhất f(x) = ax + b:

Bảng Xét Dấu:

x		$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f(x) = ax + b	a > 0		-	0	+	
	a < 0		+	0	-	

Quy tắc: ***Phải cùng – Trái trái***.

3. Phương pháp lập bảng xét dấu của nhị thức:

B_1: Tìm nghiệm của nhị thức.

B_2: Lập bảng xét dấu.

B_3: Kết luận về dấu của nhị thức.

4. Dấu của một tích, một thương các nhị thức bậc nhất:

Phương pháp xét dấu: Tìm nghiệm từng nhị thức có mặt trong biểu thức. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức có mặt trong biểu thức. Từ đó ta suy ra được dấu của biểu thức.