TÓM TẮT GIÁO KHOA ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH

1. Phương trình bậc 2: $ax^2+bx+c = 0$
với x_1, x_2 là nghiệm thì

- $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$;
- với $\Delta=b^2-4ac$ ($\Delta'=b'^2-ac$ với $b'=b/2$)
  $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\left(x_{1,2} = \dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{2a}\right)$
- Nếu a+ b+ c=0 thì $x_1= 1$; $x_2= c/a$;
- Nếu a – b+ c=0 thì $x_1= -1$; $x_2= -c/a$;
- Định lý vi-et:
  $S= x_1+ x_2 = -b/a$; $P = x_1.x_2= c/a$

2. Tam thức bậc hai $f(x)= ax^2+bx+c$

- $\Delta<0$ thì f(x) cùng dấu a
- $f(x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$
- $f(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

⊗ $x_1<0<x_2 \Leftrightarrow a.c<0$

⊗ $x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases}$

⊗ $0<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases}$

3. Phương trình bậc ba: $ax^3+bx^2+cx+d = 0$

- Nếu a+b+c+d=0 thì $x_1=1$;
  dùng Hoocner ta có:

$ax^3+ bx^2+ cx+ d = (x-1)(ax^2 + \beta x + \gamma) = 0$
với $\beta= a+b$; $\gamma= \beta+c$

- Nếu a- b+ c- d=0 thì $x_1= -1$

BẤT ĐẲNG THỨC

1. Tính chất của bất đẳng thức:

a. $A > B$ và $B > C \Rightarrow A > C$
b. $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C$
c. Nếu $C > 0$ thì $A > B \Leftrightarrow AC > BC$
d. Nếu $C < 0$ thì $A > B \Leftrightarrow AC < BC$

2. Các hệ quả:

a. $\begin{cases} A>B \\ C>D \end{cases} \Rightarrow A+C>B+D$

Chú ý: *Không được trừ hai bất đẳng thức cùng chiều*

b. $\begin{cases} A>B\ge 0 \\ C>D\ge 0 \end{cases} \Rightarrow A.C>B.D$

c. Với $A.B>0$ ta có $A>B \Leftrightarrow \dfrac{1}{A}<\dfrac{1}{B}$

d. Với $A, B\ge 0,\ n\in N^*: A>B \Leftrightarrow A^{2n}>B^{2n}$

e. Với $\forall A, B$ và $n\in N^*: A>B \Leftrightarrow A^{2n+1}>B^{2n+1}$

f. $A>B\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{A}>\sqrt{B}$

g. $A>B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A}>\sqrt[3]{B}$

3. Bất đẳng thức Cô si (Cauchy) cho hai số không âm:

Cho a ≥ 0 và $b\ge 0$, ta có: $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b.

4. Bất đẳng thức Cô si cho ba số không âm:

Cho ba số $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ ta

có : $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.

* *<u>Các chuyển dạng của bất đẳng thức Cô si</u>* :

(1) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 4$, $\forall a,b>0$

hay $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$ hay $\dfrac{1}{a+b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b

(2) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$, $\forall a,b,c>0$

hay $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$ hay $\dfrac{1}{a+b+c}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c

5. Bất đẳng thức Bunhiacopski:

a. *Bất đẳng thức Bunhiacopski cho 4 số:*

Với 4 số thực bất kỳ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ta có:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

b. *Bất đẳng thức Bunhiacopski cho 6 số:*

Với 6 số thực bất kỳ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ ta có:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

c. *Các chuyển dạng của bất đẳng thức Bunhiacopski*

(1) $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, \forall a,b \in R$ và $x,y>0$

(2) $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$,

$(\forall a,b,c \in R$ và $x,y,z>0)$

7. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:

Với hai số A, B tùy ý, ta có:

a. $|A+B| \leq |A|+|B|$.

b. $||A|-|B|| \leq |A-B|$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $A.B \geq 0$.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC:

a. Công thức cơ bản :

$\sin^2 a+\cos^2 a=1$ $\tan a.\cot a=1$

$\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}$ $\frac{1}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a$

$\cot a=\frac{\cos a}{\sin a}$ $\frac{1}{\sin^2 a}=1+\cot^2 a$

b. Công thức cộng:

- cos(a+b)=cos a.cos b–sin a.sin b
- cos(a-b)=cos a.cos b+sin a.sin b
- sin(a+b)=sin a.cos b+cos a.sin b
- sin(a-b)=sin a.cos b - cos a.sin b
- tan(a+b) = $\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$
- tan (a - b)= $\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$
- cot (a + b) = $\frac{\cot a.\cot b-1}{\cot b+\cot a}$
- cot (a – b)= $\frac{\cot a.\cot b+1}{\cot b-\cot b}$

c. Công thức nhân đôi:

- sin 2a = 2 sin a.cos a
- cos 2a = $\cos^2$a - $\sin^2$a
  = 2 $\cos^2$a-1 = 1-2$\sin^2$a
- tan 2a = $\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
- cot 2a = $\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

d. Công thức hạ bậc:

- $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$
- $\tan^2 a=\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

e. Công thức biến đổi tổng thành tích:

- cos a + cos b = 2 cos$\frac{a+b}{2}$.cos$\frac{a-b}{2}$
- cos a–cos b = – 2sin$\frac{a+b}{2}$. sin$\frac{a-b}{2}$
- sin a + sin b=2 sin $\frac{a+b}{2}$.cos$\frac{a-b}{2}$
- sin a – sin b = 2 cos$\frac{a+b}{2}$.sin$\frac{a-b}{2}$
- $\tan a \pm \tan b=\frac{\sin(a\pm b)}{\cos a.\cos b}$
- $\cot a \pm \cot b=\frac{\sin(b\pm a)}{\sin a.\sin b}$

sinx+cosx=$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

sinx–cosx=$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

f. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

$\sin a.\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

$\cos a.\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình LG cơ bản:

* $\sin x=\sin\alpha$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.$ * $\sin x=m\ (\lvert m\rvert\le 1)$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arcsin m+k2\pi\\x=\pi-\arcsin m+k2\pi\end{array}\right.$ * $\sin u(x)=\sin v(x)$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u(x)=v(x)+k2\pi\\u(x)=\pi-v(x)+k2\pi\end{array}\right.$ * $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$ * $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ * $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$	* $\cos x=\cos\alpha$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=-\alpha+k2\pi\end{array}\right.$ * $\cos x=m\ (\lvert m\rvert\le 1)$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arccos m+k2\pi\\x=-\arccos m+k2\pi\end{array}\right.$ * $\cos u(x)=\cos v(x)$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u(x)=v(x)+k2\pi\\u(x)=-v(x)+k2\pi\end{array}\right.$ * $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ * $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi$ * $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$
* $\tan x=\tan\alpha$ $\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$ * $\tan x=m$ $\Leftrightarrow x=\arctan m+k\pi$ * $\tan u(x)=\tan v(x)$ (1) $ĐK:\cos u(x)\ne 0$ $(1)\Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi$	* $\cot x=\cot\alpha$ $\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$ * $\cot x=m$ $\Leftrightarrow x=\operatorname{arccot} m+k\pi$ * $\cot u(x)=\cot v(x)$ (1) $ĐK:\sin u(x)\ne 0$ $(1)\Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi$ *trong đó* $k\in Z$

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

$a\sin^2x+b\sin x+c=0$ (đặt t= sinx, đk:$-1\le t\le 1$)
$a\cos^2x+b\cos x+c=0$ (đặt t=cosx, đk:$-1\le t\le 1$)
$a\tan^2x+b\tan x+c=0$ (đặt t= tanx)
$a\cot^2x+b\cot x+c=0$ (đặt t= cotx)

3. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx: $a\sin x+b\cos x=c$ (1) với $a^2+b^2>0$

* Chia hai vế pt(1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
(2)

* Ta xác định $\alpha\in[0;2\pi)$ sao cho:

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Khi đó ta được phương trình:

$$\sin\alpha\sin x+\cos\alpha\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(3)$$

Điều kiện để pt(3) có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$

4. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx:

$a\sin^2x+b\cos^2x+c.\sin x.\cos x+d=0$ (1)

* Với cosx = 0: ta kiểm tra $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ có phải là nghiệm của pt (1) không.
* Với cosx ≠ 0: chia 2 vế pt (1) cho $\cos^2x$ ta được pt: $a\tan^2x+b+c\tan x+d(1+\tan^2x)=0$

<u>Lưu ý:</u> Nếu cosx = 0 thì $\sin^2x=1$

5. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx:

a. Dạng của phương trình đối xứng:
a(sinx+cosx) + bsinx.cosx + c = 0 (1)

b. Dạng tương tự:
a(sinx – cosx) + bsinx.cosx + c = 0 (2)

<u>PP:</u>

Giải (1): Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ và $t^2=1+2\sin x.\cos x$

Giải (2): Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ và $t^2=1-2\sin x.\cos x$

QUY TẮC ĐẾM – HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

1. Quy tắc cộng: Giả sử công việc A có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Mỗi phương án A_i (i = 1, 2, …, k) có n_i cách thực hiện. Khi đó công việc A có thể được thực hiện bởi $n_1+n_2+\ldots+n_k$ cách.
2. Quy tắc nhân: Giả sử thực hiện công việc A bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Mỗi công đoạn A_i (i = 1, 2, …, k) có n_i cách thực hiện. Khi đó công việc A có thể được thực hiện bởi $n_1.\ n_2 \ldots n_k$ cách.

<u>Lưu ý</u>:

* Khi thực hiện một công việc, có nhiều phương án, mỗi phương án ta đều thực hiện được xong công việc. Khi đó ta dùng quy tắc cộng (cộng tất cả số cách thực hiện của từng phương án) ta được số cách thực hiện công việc.
* Khi thực hiện một công việc mà phải trải qua nhiều bước mới xong công việc thì ta dùng quy tắc nhân (nhân tất cả số cách thực hiện cho

từng bước) ta được số cách thực hiện công việc.

3. Hoán vị.

a) Cho một tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập A. (Gọi tắt là một hoán vị của A hay một hoán vị của n phần tử)

b) Số hoán vị của một tập hợp có n phần tử là:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)...2.1$$

4. Chỉnh hợp.

a) Cho tập hợp A có n phần tử và cho số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của n).

b) Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

5. Tổ hợp.

a) Cho tập hợp A có n phần tử và cho số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập hợp con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của tập A (Gọi tắt là tổ hợp chập k của A)

b) Số tổ hợp chập k của một tập hợp n phần tử là: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Chú ý: $A_n^n = P_n$

Quy ước: $0! = 1$; $A_n^0 = 1$; $C_n^0 = 1$

Với quy ước này ta có: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ đúng với $0 \leq k \leq n$

Tính chất 1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$

Tính chất 2. (hằng đẳng thức Pascal): $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ $(1 \leq k \leq n)$

NHỊ THỨC NEWTON

1) Công thức nhị thức Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Nhận xét:

- Trong công thức (1) có n + 1 số hạng.
- Số hạng thứ k + 1 là $C_n^k a^{n-k} b^k$
- Các hệ số của nhị thức có tính đối xứng theo tính chất $C_n^k = C_n^{n-k}$
- Trong mỗi số hạng, tổng số mũ của a và b luôn bằng n.

2) Các dạng đặc biệt của nhị thức Newton:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$$

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ... + (-1)^n C_n^n x^n$$

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + C_n^n$$

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$$

$$0 = (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n$$

XÁC SUẤT

Một số lưu ý: Cho hai tập hợp A, ký hiệu n(A) hoặc |A| là để chỉ số phần tử của tập A

* Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
* Nếu $A \cap B \neq \varnothing$ thì:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

1. Phép thử và không gian mẫu.

* Phép thử : là một thí nghiệm hay một hành động mà:

- Kết quả của nó không thể dự đoán trước được.
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của hành động đó.

* Không gian mẫu: Tập hợp mọi kết quả của một phép thử T được gọi là KGM của T và kí hiệu là Ω.

2. Biến cố.

- Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.
- Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.
  * Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T, được mô tả bởi tập Ω.
  * Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T, được mô tả bởi tập $\varnothing$

3. Xác suất.

* Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$
* Chú ý: $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$

a. Biến cố hợp: Cho hai biến cố A và B. Biến cố: “A hoặc B xảy ra”, ký hiệu $A \cup B$ được gọi là hợp của hai biến cố A và B.
Ta có: $A \cup B \subset \Omega$
b. Biến cố xung khắc.
- Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B này được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Vậy: $A \cap B = \varnothing$
c. Biến cố đối.
- Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố “không A”, kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố đối của biến cố A. Ta nói A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối nhau.
- Ta có: $\Omega_{\overline{A}} = \Omega \setminus \Omega_A \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Lưu ý: Nếu hai biến cố đối nhau thì xung khắc.
d. Biến cố giao.
- Cho hai biến cố A và B. Biến cố: “A và B cùng xảy ra” , kí hiệu $A \cap B$ (hay AB) được gọi là giao của hai biến cố A và B.
e. Hai biến cố độc lập.
 * Hai biến cố được gọi là ĐỘC LẬP với nhau nếu việc xay ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng xác suất xảy ra của biến cố kia.
 * Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì: A và $\overline{B}$; B và $\overline{A}$; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng là hai biến cố độc lập.
f. Quy tắc cộng xác suất hai biến cố xung khắc.
Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
g. Quy tắc nhân xác suất hai biến cố độc lập :
Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì : $P(A.B) = P(A).P(B)$

ĐẠO HÀM :

1. Qui Tắc:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u.v)' = u'v + v'u$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
4. $(ku)' = ku'$ (k:const)

2. Công thức:

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'a^u.\ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

II. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM và BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ :

1. Phương trình tiếp tuyến: (pttt)

@ **Loại 1:** Pttt tại $M(x_0, y_0) \in (C) : y = f(x)$
Tính : y’=
$y'(x_0)=$
pttt: $y = f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

@ **Loại 2:** Pttt có hệ số góc k cho trước.
- ✓ Gọi $M(x_o, y_o)$ là tiếp điểm.
- ✓ Tính f’(x)
- ✓ Giải phương trình $f'(x_o) = k \Rightarrow x_o, y_o$.
- ✓ Viết pttt: $y = k(x-x_0) + y_0$

Chú ý :
- pttt // $y = ax+ b$ có hệ số góc $k = a$
- pttt $\perp$ $y = ax+ b$ có hệ số góc $k = -1/a$.

@ **Loại 3**: Pttt của đồ thị hàm số (C): y= f(x) biết tt qua $M(x_0, y_0)$
- ➢ Ptđt d qua M có hệ số góc k là:
$y = k(x-x_0)+ y_0$
- ➢ Điều kiện tiếp xúc :

Hệ pt $\begin{cases} f(x) = k(x - x_0) + y_0 \ (1) \\ f'(x) = k \ (2) \end{cases}$ có nghiệm

Giải hệ: thay (2) vào (1) Giải pt này tìm được x. Thay vào (2) ta được k thế vào pttt d ở trên.

2. Giao điểm của 2 đường:

Cho $y = f(x)$ (C_1) và $y = g(x)$ (C_2)
+ Ptrình hoành độ giao điểm là: f(x) = g(x) .
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của (C_1) và (C_2)
+ Bài toán ứng dụng cho việc biện luận nghiệm f(x,m)=0 dựa vào đồ thị:
- ✓ Biến đổi về dạng f(x)=g(m)
- ✓ Đặt y = f(x) là đồ thị đã vẽ; y=g(m) là đt //Ox.

- ✓ Từ đó biện luận số nghiệm pt dựa vào đồ thị.(chú ý đến giá trị CT và CĐ)

+ Để f(x) tiếp xúc g(x) ta có: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm. Giải hệ, tìm hoành độ tiếp điểm x_o

3. Đơn điệu:

Dạng 1: Xét tính đồng biến, nghịch biến (tính đơn điệu hay sự biến thiên) của hàm số

PP : Cho hàm số y = f(x)

+ Tìm TXĐ của hàm số
+ Tính y' (hay f'(x)) và giải pt: y' = 0
+ Lập BBT
+ Kết luận

Đặc biệt: f(x) = ax² + bx + c. Ta có

+ $f(x) \ge 0\ \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

+ $f(x) \le 0\ \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

Dạng 2: Tìm điều kiện của m để hàm số đơn điệu trên khoảng cho trước

PP :

+ f(x) đồng biến trên D $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0$, $\forall x \in D$
+ f(x) nghịch biến trên D $\Leftrightarrow f'(x) \le 0$, $\forall x \in D$

(chỉ xét trường hợp f(x) = 0 tại 1 số hữu hạn điểm trên miền D)

Lưu ý:

****** Hàm số y = ax³+bx²+cx+d***

- Để hs tăng trên R

$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases}$

- Để hs giảm trên R

$\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases}$

******Hàm số*** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ **, D = R\\{$-\dfrac{d}{c}$}**

- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xđ

$\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow$ ad – cb >0

- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xđ

$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow$ ad – cb <0

4. Cực trị:

Dạng 1: Tìm cực trị của hàm số:

Phương pháp: *Sử dụng các quy tắc tìm CT :*

1/ Quy tắc 1:

- *B1: Tìm tập xác định D*
- *B2: Tính đạo hàm y' = f '(x)*
- *B3: Tìm các điểm x_i thoả mãn điều kiện: $x_i \in D$ và là nghiệm của y' hoặc làm cho y' không xác định.*
- *B4: Lập bảng biến thiên của hàm số trên D và kết luận.*

2/ Quy tắc 2:

- *B1: Tìm tập xác định D*
- *B2: Tính đạo hàm y' = f '(x)*
- *B3: Giải phương trình y' = 0 để tìm các nghiệm x_i*
- *B4: Tính đạo hàm cấp hai y'' = f ''(x) ; tính f''(x_i) và nhận xét dấu :*

  + Nếu f ''(x_0) < 0 thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 và $y_{CĐ}$ = f(x_0)

  + Nếu f ''(x_0) > 0 thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 và y_{CT} = f(x_0)

Dạng 2: Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_o

- Tìm y'
- ycbt → y'(x_o) = 0(1)
- giải (1) = > tìm m = m_o
- Thöû laïi:

Cách 1: (Sử dụng BBT) Với m = m_o, ta lập BBT, nhận xét cực trị từ đó kết luận

Cách 2: (Sử dụng y'').Tìm y'', với m = m_o, ta tính y''(x_o).

Nếu y''(x_o) > 0 thì hs ñaït cöïc tieåu

Nếu y''(x_o) < 0 thì hs ñaït CÑ

Từ đó kết luận

(Chú ý: nếu y''(x_o) = 0 thì thử lại bằng cách lập BBT)

Dạng 3: Tìm m để hàm số có cực trị

Một số hàm đặc biệt:

Loại 1: hàm bậc 3 có 2 cực trị

+ Tìm D vaø y'

+ ycbt $\Leftrightarrow$ y'= 0 coù 2 nghieäm vaø y' ñoåi daáu khi qua nghieäm

$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm pb

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \ne 0 \end{cases}$ → giaûi, tìm m

(Chú ý: nếu ycbt là tìm m để hàm số *có cực trị* thì xét thêm trường hợp a = 0)

Loại 2: hàm bậc 4 có 3 cực trị

+ Tìm D vaø y'

+ y'= 0 $\Leftrightarrow (x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}\right.$$

+ ycbt ⇔ y'= 0 coù 3 nghieäm vaø y' ñoåi daáu khi qua nghieäm

$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ coù 2 n_o pb khác x_o

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \text{giaûi, tìm m}$$

Loại 3: Hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{dx + e}$ có 2 cực trị

+ Tập xác định D=R\\$\{-e/d\}$

+ Tính

$$y' = \alpha - \frac{\gamma . d}{(dx+e)^2} = \frac{mx^2 + nx + p}{(dx+e)^2}$$

+ Để hàm số có cực đại và cực tiểu

⇔ $y' = 0$ có hai nghiệm pb thuộc D

⇔ phương trình g(x)= $mx^2 + nx + p = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ g(-\dfrac{e}{d}) \neq 0 \end{cases}$

5. GTLN, GTNN:

a. Trên (a,b)

- Tính y'
- Lập bảng biến thiên trên (a ; b)
- KL: $\max\limits_{(a;b)} y = y_{CD}$, $\min\limits_{(a;b)} y = y_{CT}$

b. Trên [a;b]

- Tính y'
- Giải pt y' = 0 tìm nghiệm $x_0 \in (a;b)$
- Tính y (x_0) , y(a) , y (b)

Chọn số lớn nhất M ,KL: $\max\limits_{[a;b]} y = M$

Chọn số nhỏ nhất m , KL: $\min\limits_{[a;b]} y = m$

III. KHẢO SÁT HÀM SỐ:

1. Hàm bậc ba $y = ax^3+bx^2+cx+d$ và Hàm trùng phương $y = ax^4+bx^2+c$:

- Tập xác định: D = R
- Đạo hàm : y'= . . . . .

  y'= 0 ⇔ x = ?

  $\lim\limits_{x\to-\infty} y = ?$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = ?$
- Bảng biến thiên:

⇒ Caùc khảng ñoàng bieán , nghòch bieán , ñieåm cöïc ñaïi , ñieåm cöïc tieåu .

- y'' = ...

  y''= 0 ⇔ x = ?

*** Các vấn đề đặc biệt cho hàm bậc 3:**

$$\boldsymbol{y = y'.p(x) + Ax + B}.$$

- Đường thẳng y = Ax + B là đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.
- Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt thì hai giá trị cực trị trái dấu.
- Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm pb cách đều nhau ⇔ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có 3 nghiệm lập thành csc ⇔ y'=0 có 2 nghiệm pb và điểm uốn I thuộc Ox.

*** Các vấn đề đặc biệt cho hàm trùng phương:**

- Đt nhận Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số có 3 (hoặc 1) cực trị trên D ⇔y'=0 có 3 n_0 pb (hoặc 1 n_0)
- Đồ thị cắt Ox tại 4 điểm pb

  ⇔ Δ>0; P>0; S>0.
- Đồ thị cắt Ox tại 4 điểm pb lập thành csc ⇔ Δ>0; P>0; S>0; $t_2 = 9t_1$ ($t = x^2$) sử dụng đlý Vi-et.

2 . Hàm nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

- Tập xác định D=R\\$\{-d/c\}$
- Tính $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$
- TCĐ $x = -d/c$

  ($\lim\limits_{x\to -\frac{c}{d}^+} y = (\pm)\infty$ $\lim\limits_{x\to -\frac{c}{d}^-} y = (\pm)\infty$)
- TCN $y = a/c$ ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \dfrac{a}{c}$)
- Bảng biến thiên
- Điểm đặc biệt (4điểm)- Tìm giao điểm với trục Ox, Oy
- Đồ thị (nhận giao điểm 2 tiệm cận làm tâm đối xứng)

3. Hàm hữu tỷ (nâng cao):

$$\boldsymbol{y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{dx + e}}$$

- Tập xác định D = R\\$\{-e/d\}$
- Tính y'=$\alpha - \dfrac{\gamma . d}{(dx+e)^2} = \dfrac{mx^2 + nx + p}{(dx+e)^2}$

- y' = 0 tìm 2 cực trị (hoặc không có.)
- TCĐ $x=-\frac{e}{d}$ ($\lim\limits_{x\to -\frac{e}{d}^{+}} y=(\pm)\infty$, $\lim\limits_{x\to -\frac{e}{d}^{-}} y=(\pm)\infty$)
- TCX $y=\alpha x+\beta$
- Bảng biến thiên
- Điểm đặc biệt (4 điểm)
- Đồ thị

*** Một số kết quả quan trọng:**

- Đthị nhận giao điểm 2 tiệm cận làm tâm đối xứng
- Nếu x_i là cực trị thì giá trị cực trị là $y_i=\frac{2ax_i+b}{d}$. Suy ra phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị.
- Đthị cắt Ox tại 2 điểm pb ⇔ $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm pb $\neq -\frac{e}{d}$

IV. HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT:

1. Công thức lũy thừa:

Với $a>0$, $b>0$; $m, n \in R$ ta có:

$a^n a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$;

$(\frac{1}{a^n}=a^{-n}$; $a^0=1$; $a^{-1}=\frac{1}{a})$;

$(a^n)^m=a^{nm}$; $(ab)^n=a^n b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$;

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

2. Công thức logarit:

$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c=b}$ ($0< a\neq 1$; $b>0$)

Với $0< a\neq 1$, $0<b\neq 1$; $x, x_1, x_2>0$; $\alpha\in R$:

$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$;

$\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$;

$a^{\log_a x}=x$; $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$;

$\log_{a^\alpha} x=\frac{1}{\alpha}\log_a x$; $(\log_a a^x=x)$;

$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$; $(\log_a b=\frac{1}{\log_b a})$

$\log_b a.\log_a x=\log_b x$; $a^{\log_b x}=x^{\log_b a}$.

3. Hàm số mũ và hàm số logarit

➢ **Hàm số mũ: y = a^x**

1/ <u>Tập xác định</u>: D = R

2/ <u>Đạo hàm</u>: $\boxed{(a^x)'=a^x\ln a.}$, và $\boxed{(e^x)'=e^x}$,

Hàm hợp: $(a^u)'=u'.\ln a.a^u$

$(e^u)'=u'.e^u$

3/ <u>Tính chất</u>: a > 1: hsố tăng

0 < a < 1: hsố giảm

➢ **<u>Hàm số lôgarit: y = $\log_a$ x</u>**

1/ <u>Tập xác định</u>:D = (0; + ∞)

2/ <u>Đạo hàm</u>: $\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x.\ln a}}$ và $\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$

Hàm hợp: $(\log_a u)'=\frac{u'}{u.\ln a}$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

3/ <u>Các tính chất</u>: a > 1: hsố tăng

0 < a < 1: hsố giảm

4. Phương trình mũ – logarit:

- **Dạng cơ bản: a^x= b (a> 0 , $a\neq 1$)**

b≤0 : pt vô nghiệm

b>0 : $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b$

- **Một số phương pháp giải:**

1, Đưa về cùng cơ số:

$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ (a>0, $a\neq 1$)

2, Đặt ẩn phụ:

➢ $A.a^{2x}+B.a^x+C=0$

Đặt t = a^x, đk t>0

➢ $A.a^{2x}+B.(ab)^x+C.b^{2x}=0$.

Đặt t $=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, đk t>0

➢ $A.a^x+B.b^x+C=0$ $[(ab)^x=1]$

Đặt t = a^x, đk t>0, $b^x=\frac{1}{t}$

3. Phương pháp logarit hóa.

4, Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số: Phương pháp này dựa vào tính đồng biến, nghịch biến và đồ thị của hàm số.

- **Dạng cơ bản:** $\log_a x=b$ (a> 0 , $a\neq 1$)

Điều kiện : x > 0

$\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b$

- **Một số phương pháp giải:**

Đưa về cùng cơ số:

$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

(điều kiện f(x) > 0 hay g(x) > 0)

Các phương pháp còn lại như ptrình mũ

5. **Bất PT mũ – logarit:**

- **Dạng $a^x > b$ ($a > 0$, $a \neq 1$)**

  $b \leq 0$: Bpt có tập nghiệm R
  b>0 :
  - ✓ $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$, khi a>1
  - ✓ $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$, khi 0 < a < 1
- **Dạng $\log_a x > b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, x>0)**
  - ✓ $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$, khi a >1
  - ✓ $\log_a x > b \Leftrightarrow x < a^b$, khi 0 < a < 1

Lưu ý:

▪ Nếu $a > 1$ thì:

- ✓ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- ✓ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

▪ Nếu $0 < a < 1$ thì:

- ✓ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
- ✓ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

V. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN:

1.Định nghĩa: F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số y=f(x) trên khoảng (a;b)

$$\Leftrightarrow F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a;b)$$

- **Nguyên hàm của hàm số sơ cấp:**

$1/\int dx = x + C$

$2/\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

$3/\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$4/\int e^x dx = e^x + C$

$5/\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$6/\int \cos x dx = \sin x + C$

$7/\int \sin x dx = -\cos x + C$

$8/\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$

$9/\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$

$10/\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a > 0$

$11/\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

$12/\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

- **Nguyên hàm các hàm số thường gặp:**

$1/\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} + C$

$2/\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

$3/\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

$4/\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

$5/\int \sin(ax+b)dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C$

$6/\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{-1}{a.(ax+b)} + C$

$7/\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \int (1+\tan^2(ax+b))dx$

$= \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$

$8/\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = \int (1+\cot^2(ax+b))dx$

$= -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

2. Các phương pháp tính tích phân:
Tích phân của tích, thương phải đưa về tích phân của một tổng hoặc hiệu bằng cách nhân phân phối hoặc chia đa thức.

*******Phương pháp đổi biến số :**

$$A = \int_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x).d(x)$$

- ➢ Đặt : $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x).d(x)$
- ➢ Đổi cận: $\begin{cases} x = b \Rightarrow t = \varphi(b) \\ x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \end{cases}$

➢ Do đó: $A = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t).dt = \left[F(t)\right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$

Các dạng đặc biệt cơ bản:

1. $I = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$

- Đặt: x= a.tant $\left(-\frac{\pi}{2} \langle t \langle \frac{\pi}{2}\right)$

$$=> dx = \frac{a}{\cos^2 t}.dt = a.(1+\tan^2 t).dt$$

- Đổi cận

2. $J = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}.dx$

- Đặt $x = a\sin t \left(\frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ dx = a.cost dt

- Đổi cận

MỘT SỐ DẠNG ĐỔI BIẾN THƯỜNG GẶP:

Dạng nguyên hàm cần tìm	Cách đặt biến số
$\int f(\sin x)\cos x dx$	$t = \sin x \vee t = m\sin x + n$
$\int f(\cos x)\sin x dx$	$t = \cos x \vee t = m\cos x + n$
$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx$	$t = \ln x \vee t = m\ln x + n$
$\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$	$t = \tan x \vee t = m\tan x + n$
$\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}dx$	$t = \cot x \vee t = m\cot x + n$
$\int f(x^k)x^{k-1}dx$	$t = x^k \vee t = mx^k + m$
$\int f(e^x)e^x dx$	$t = e^x \vee t = me^x + n$

Chú ý : Nếu hàm số dưới dấu nguyên hàm có chứa dấu căn $\left(\sqrt[n]{\ }\right)$ thì thường ta đặt : $t = \sqrt[n]{\ }$

******Phương pháp tính tích phân từng phần**

Loại 1:

$$A = \int_a^b P(x).\begin{bmatrix} e^x \\ Sinx \\ Cosx \end{bmatrix}.dx$$

(Trong đó P(x) là hàm đa thức)

PP :

- Đặt u = P(x) $\Rightarrow$ du = P'(x).dx

$$dv = \begin{bmatrix} \int e^x \\ \int Sinx \\ \int Cosx \end{bmatrix}.dx \Rightarrow v = ...$$

- Áp dụng công thức tích phân từng phần

$$A = \left[u.v\right]_a^b - \int_a^b v.du$$

Loại 2: $B = \int_a^b P(x).Ln(ax+b).dx$

PP:

- Đặt u = Ln(ax+b) $\Rightarrow$ $du = \frac{a}{ax+b}.dx$

dv = P(x).dx $\Rightarrow$ v = ...

- Áp dụng công thức tích phân từng phần :

$$B = \left[u.v\right]_a^b - \int_a^b v.du$$

3. Diện tích hình phẳng:

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) :
y = f(x), trục Ox và hai đường x= a; x= b

PP:

- DTHP cần tìm là:

$$S = \int_a^b |f(x)|.dx \quad (a < b)$$

- Hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là nghiệm của phương trình: f(x) = 0

❖ Nếu p.trình f(x) = 0 vô nghiệm hoặc có nghiệm không thuộc đoạn $[a;b]$ thì:

$$S = \left|\int_a^b f(x).dx\right|$$

❖ Nếu p.trình f(x) = 0 có nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$. Giả sử x = α , x = β thì

$$S = \int_a^\alpha |f(x)|.dx + \int_\alpha^\beta |f(x)|.dx + \int_\beta^b |f(x)|.dx$$

$$S = \left|\int_a^\alpha f(x).dx\right| + \left|\int_\alpha^\beta f(x).dx\right| + \left|\int_\beta^b f(x).dx\right|$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C): y =f(x) và trục hoành:

PP :

HĐGĐ của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình: f(x) = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \end{array}\right.$

$$S=\int_a^b |f(x)|.dx=\left|\int_a^b f(x).dx\right|$$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường (C_1): y = f(x) và (C_2): y = g(x) và hai đường x = a; x = b:

PP:

- DTHP cần tìm là:

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|.dx$$

- HĐGĐ của hai đường (C_1) và (C_2) là nghiệm của p.trình: f(x) – g(x) = 0

Lưu ý:

+ Dạng 2 và dạng 3 lập luận giống dạng 1.

+ Có thể dùng phương pháp đồ thị để tính diện tích hình phẳng

4. Thể tích vật thể:

a) Hình phẳng (H) giới hạn bởi: x= a; x = b; trục Ox và y = f(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi (H) quay quanh trục Ox tạo ra vật thể có thể tích:

$$V=\pi.\int_a^b [f(x)]^2.dx$$

b) Hình phẳng (H) giới hạn bởi: y = a; y = b; trục Oy và x = g(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi (H) quay quanh trục Oy tạo ra vật thể có thể tích:

$$V=\pi.\int_a^b [g(y)]^2.dy.$$

VI. SỐ PHỨC:

1. Các khái niệm :

❖ Số i : $i^2 = -1$

❖ Số phức dạng : z = a + bi ; a,b∈R

(a : phần thực, b : phần ảo)

❖ Modun của số phức : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

❖ Số phức liên hợp của z = a + bi là

$\bar{z}=a-bi$

$\bar{\bar{z}}=z$; $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$; $\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}'$;

$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$

$|z|\ge 0$ với mọi $z\in\mathbb{C}$, $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.

$|z|=|\bar{z}|$; $|zz'|=|z||z'|$; $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$;

$|z+z'|\le|z|+|z'|$

z là số thực $\Leftrightarrow z=\bar{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z=-\bar{z}$

2. Các phép toán :

❖ a+ bi = c + di $\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

❖ (a + bi) + (c + di) = (a +c) + (b + d)i

❖ (a + bi) - (c + di) = (a -c) + (b - d)i

❖ (a + bi)(c + di)

$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

❖ $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$.

$i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$.

$(1+i)^2=2i$; $(1-i)^2=-2i$.

3. Căn bậc hai của số phức: z = a + bi (a,b∈R) (nâng cao)

+ Đặt w = x + y i.

Vì w^2 = z nên $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$

+ Giải hệ, tìm x và y

Lưu ý :

Các căn bậc hai của số thực a < 0 là : $\pm i\sqrt{|a|}$

4. Giải phương trình bậc hai :

a) $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ ***(*** $a\neq 0$ ***;*** $a,b,c\in R$***)***

Đặt $\Delta=b^2-4ac$

❖ Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có một nghiệm kép (thực) : x = $\frac{-b}{2a}$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phức : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

☞ **Định lý Viet :**

Nếu phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ ($a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có hai nghiệm z_1, z_2 thì :

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

☞ **Định lý đảo của định lý Viet :**

Nếu hai số z_1, z_2 có tổng $z_1 + z_2 = S$ và $z_1 z_2 = P$ thì z_1, z_2 là nghiệm của phương trình : $z^2 - Sz + P = 0$.

b) $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$; $a,b,c \in \mathbb{C}$)

(nâng cao)

- Tính Δ
- Tìm căn bậc hai của Δ
- $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ (với δ là một căn bậc hai của Δ)

5. Dạng lượng giác của số phức (nâng cao)

a/ Argumen: là góc φ sao cho:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases} \quad \text{với } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

b/ Dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$

c/ Nhân, chia dưới dạng lượng giác:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

d/ Công thức Moivre:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

e/ Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác:

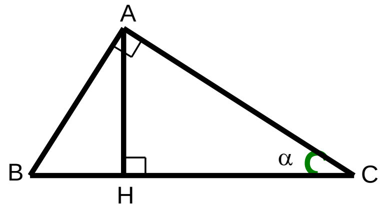
$$\pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

TÓM TẮT GIÁO KHOA HÌNH HỌC

I. TỈ SỐ GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC}$ (ĐỐI *chia* HUYỀN) 2. $\cos\alpha = \dfrac{AC}{BC}$ (KỀ *chia* HUYỀN)

3. $\tan\alpha = \dfrac{AB}{AC}$ (ĐỐI *chia* KỀ) 4. $\cot\alpha = \dfrac{AC}{AB}$ (KỀ *chia* ĐỐI)



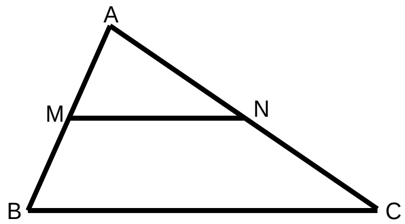
II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lí Pitago) => $AB^2 = BC^2 - AC^2$
2. $AB^2 = BH.BC$ 3. $AC^2 = CH.BC$
4. $AH^2 = BH.CH$ 5. $AB.AC = BC.AH$ 6. $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

III. ĐỊNH LÍ CÔSIN

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ 3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

IV. ĐỊNH LÍ SIN $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$



V. ĐỊNH LÍ TALET MN // BC

a) $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$; b) $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

VI. DIỆN TÍCH TRONG HÌNH PHẲNG

1. Tam giác thường:

a) $S = \dfrac{1}{2}ah$ b) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Công thức Hê-rông)

c) $S = pr$ (r: bk đ.tròn nội tiếp tam giác)

2. Tam giác đều cạnh a:

a) Đường cao: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; b) $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) Đường cao cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

3. Tam giác vuông:

a) $S = \dfrac{1}{2}ab$ (a, b là 2 cạnh góc vuông)

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của ***cạnh huyền***

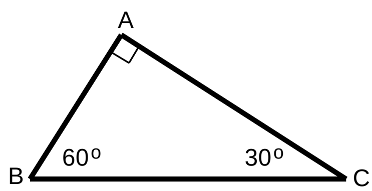
4. Tam giác vuông cân (nửa hình vuông):

a) $S = \dfrac{1}{2}a^2$ (2 cạnh góc vuông bằng nhau)

b) Cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$

5. Nửa tam giác đều:

a) Là tam giác vuông có một góc bằng 30^o hoặc 60^o



b) BC = 2AB c) AC = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ d) S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

6. Tam giác cân:

a) S = $\frac{1}{2}$ah (h: đường cao; a: cạnh đáy)

b) Đường cao hạ từ đỉnh cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực

7. Hình chữ nhật: S = ab (a, b là các kích thước)

8. Hình thoi: S = $\frac{1}{2}d_1.d_2$ (d_1, d_2 là 2 đường chéo)

9. Hình vuông:

a) $S = a^2$ b) Đường chéo bằng $a\sqrt{2}$

10. Hình bình hành: S = ah (h: đường cao; a: cạnh đáy)

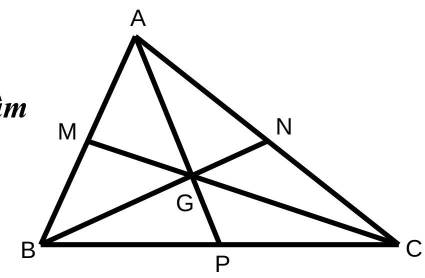
11. Đường tròn:

a) $C = 2\pi R$ (R: bán kính đường tròn)

b) $S = \pi R^2$ (R: bán kính đường tròn)

VII. CÁC ĐƯỜNG TRONG TAM GIÁC

1. Đường trung tuyến:



G: là trọng tâm của tam giác

a) Giao điểm của 3 đường trung tuyến của tam giác gọi là ***trọng tâm***

b) $BG = \frac{2}{3}BN$; $BG = 2GN$; $GN = \frac{1}{3}BN$

2. Đường cao: Giao điểm của 3 đường cao của tam giác gọi là ***trực tâm***

3. Đường trung trực:

Giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác là ***tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác***

4. Đường phân giác:

Giao điểm của 3 đường phân giác của tam giác là ***tâm đường tròn nội tiếp tam giác***

VIII. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Hình tứ diện đều:

Có 4 mặt là các tam giác đều bằng nhau.

Chân đường cao trùng với ***tâm*** của đáy (hay trùng với ***trọng tâm*** của tam giác đáy).

Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau

2. Hình chóp đều:

Có đáy là đa giác đều .

Có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.

Chân đường cao trùng với ***tâm*** của đa giác đáy .

Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau

3. Đường thẳng d vuông góc với mp (α):

a) Đt d vuông góc với 2 đt cắt nhau cùng nằm trên mp (α)

Tức là: $\begin{cases} d \perp a;\ d \perp b \\ a \cap b \\ a, b \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$

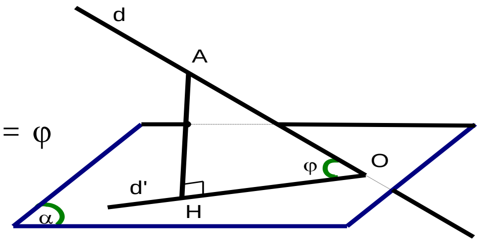
b) $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \\ a \perp d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$

c) Đt d vuông góc với mp (α) thì d vuông góc với mọi đt nằm trong mp (α)

4. Góc φ giữa đt d và mp (α):

d cắt (α) tại O và $A \in d$

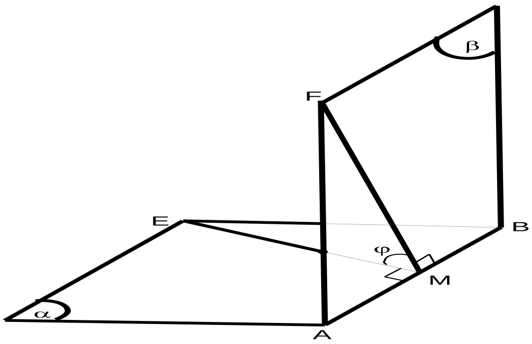
Nếu $\begin{cases} AH \perp (\alpha) \\ H \in (\alpha) \end{cases}$ thì góc giữa d và (α) là φ hay $\widehat{AOH} = \varphi$



5. Góc giữa 2 mp (α) và mp (β):

Nếu $\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = AB \\ FM \perp AB; EM \perp AB \\ EM \subset (\alpha), FM \subset (\beta) \end{cases}$

thì góc giữa (α) và (β) là φ hay $\widehat{EMF} = \varphi$



6. Khoảng cách từ điểm A đến mp(α):

Nếu AH $\perp$ (α) thì d(A, (α)) = AH (với H $\in$ (α))

IX. KHỐI ĐA DIỆN:

1. Thể tích khối lăng trụ: $V = Bh$ (B: diện tích đáy; h: chiều cao)

2. Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$ (diện tích đáy là đa giác)

3. Tỉ số thể tích của khối chóp: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

4. Diện tích xq của hình nón tròn xoay: $S_{xq} = \pi Rl$ (R: bk đường tròn; l: đường sinh)

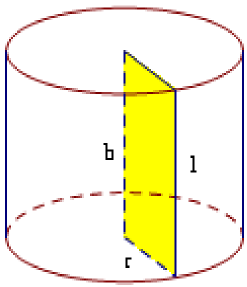
5. Thể tích của khối nón tròn xoay: $V = \frac{1}{3}Bh$ (diện tích đáy là đường tròn)

6. Diện tích xq của hình trụ tròn xoay: $S_{xq} = 2\pi Rl$ (R: bk đường tròn; l: đường sinh)

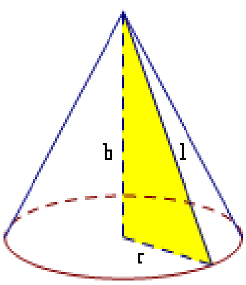
7. Thể tích của khối trụ tròn xoay: $V = Bh = \pi R^2 h$ (h: chiều cao khối trụ)

8. Diện tích của mặt cầu: $S = 4\pi R^2$ (R: bk mặt cầu)

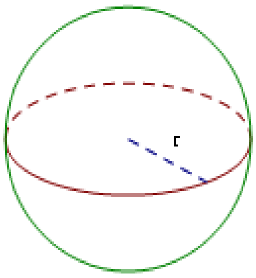
9. Thể tích của khối nón tròn xoay: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (R: bán kính mặt cầu)



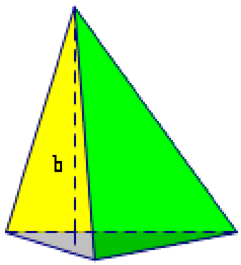
Hình trụ



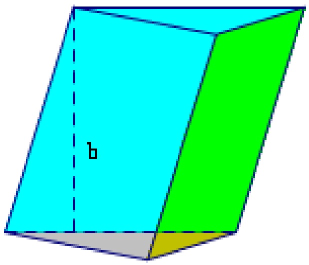
Hình nón



Hình cầu



Hình chóp



Hình lăng trụ

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ Oxy

I. Vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến của đường thẳng:

1. VTCP: Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là VTCP của đường thẳng (d) nếu và giá của $\vec{u}$ // hoặc trùng (d).

NX: - Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) thì $k\vec{u}$ (k≠0) cũng là một VTCP của (d)
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm của đ.thẳng và một VTCP của nó.

2. VTPT: Ta gọi vectơ $\vec{n}$ là VTPT của đường thẳng (d) nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và nó có giá vuông góc với (d).

NX: - Nếu vectơ $\vec{n}$ là 1 VTPT của đường thẳng (d) thì $k\vec{n}$ (k≠0) cũng là 1 VTPT của (d).
- Một đường thẳng được xác định nếu biết một điểm của đường thẳng và một VTPT của nó.
- Nếu (d) có VTPT $\vec{n} = (a;b)$ thì (d) có VTCP $\vec{u} = (-b;a)$ hay $\vec{u} = (b;-a)$

II. Phương trình đường thẳng:

1. Phương trình tham số: Trong mpOxy, đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_o;y_o)$ và có VTCP $\vec{u} = (a;b)$. Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases}$ $(t \in R)$

2. Phương trình chính tắc: Cho đường thẳng (d) có ptts $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases}$ $(t \in R)$

Nếu $a.b \neq 0$ thì d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ (2)

3. Phương trình tổng quát: Trong mpOxy, đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_o;y_o)$ và có VTPT $\vec{n} = (A;B)$, (d) có phương trình tổng quát là: $A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$

4. Các trường hợp riêng: Cho đường thẳng (d): ax + by + c = 0 (1)
- Nếu a = 0 thì (1) ⇔ by +c = 0 ⇔y = -c/b (khi đó (d) vuông góc với Oy tại điểm A(0; -c/b)
- Nếu b = 0 thì (1) ⇔ ax +c = 0 ⇔x = -c/a (khi đó (d) vuông góc với Oy tại điểm B(-c/a;0)
- Nếu c = 0 thì (1) ⇔ ax + by = 0 (khi đó (d) đi qua gốc tọa độ)

III. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng $(d): Ax + By + C = 0$ và $(d'): A'x + B'y + C' = 0$

Nếu a’, b’, c’ ≠ 0 thì ta có: a) (d) cắt (d’) ⇔ $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$

b) (d) // (d’) ⇔ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$

c) (d) trùng (d’) ⇔ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

IV. Góc và khoảng cách:

1. Góc: Cho hai đường thẳng (d): Ax + By + C = 0 và (d’): A’x + B’y + C’ = 0 tạo với nhau góc φ.

Ta có: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|} = \dfrac{|aa' + bb'|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2}}$

2. Khoảng cách: Cho đường thẳng d: ax + by + c = 0 và điểm $M_o(x_o;y_o)$.

Ta có: $d[M_o,(d)] = \dfrac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

3. Dấu của biểu thức: Ax + By + C

Cho đường thẳng (d): Ax + By + C = 0 và hai điểm $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$. Khi đó:

* Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với (d) $\Leftrightarrow (Ax_M + By_M + C).(Ax_N + By_N + C) > 0$

* Hai điểm M, N nằm khác phía đối với (d) $\Leftrightarrow (Ax_M + By_M + C).(Ax_N + By_N + C) < 0$

4. Điều kiện đường thẳng tiếp xúc đường tròn:
   Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R.
   Điều kiện cần và đủ để đường thẳng (d) tiếp xúc với (C) là $d[I,(d)] = R$

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN.

1. Phương trình đường tròn:

a) Phương trình chính tắc: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I(a;b) và bán kính R. Khi đó (C) có phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (1). PT(1) gọi là PTCT của (C).

b) Phương trình tổng quát: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ $(đk:\ a^2 + b^2 - c > 0)$ (2). PT(2) là PTTQ của đường tròn tâm I(a;b) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

Cho đường tròn (C) tâm I , bán kính R và đường thẳng d.

a) $d[I,d] = R$ $\Leftrightarrow$ d tiếp xúc (C)

b) $d[I,d] < R$ $\Leftrightarrow$ d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

c) $d[I,d] > R$ $\Leftrightarrow$ d và (C) không có điểm chung.

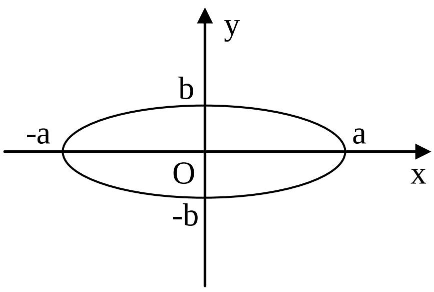
3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R

a) Tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là đường thẳng đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}$

b) Điều kiện để một đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) là: $d[I,d] = R$

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP



1. Định nghĩa:

Cho F_1 , F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ (c >0)

$M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$

F_1 , F_2 : các tiêu điểm, $F_1F_2 = 2c$: tiêu cự

2. Phương trình chính tắc của elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0,\ b^2 = a^2 - c^2)$$

- Tọa độ các tiêu điểm : $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$
- Với M (x; y) $\in$ (E) thì MF_1 , MF_2 được gọi là các bán kính qua tiêu điểm của M và

  $MF_1 = a + \frac{c}{a}$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$

3. Hình dạng của elip:

- (E) nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Tọa độ các đỉnh : $A_1(-a ; 0)$, $A_2(a ; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$
- Độ dài các trục : trục lớn $A_1A_2 = 2a$, trục nhỏ $B_1B_2 = 2b$
- Tâm sai của (E) : $e = \frac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$
- Hình chữ nhật cơ sở : tạo bởi các đường thẳng x = ± a , y = ± b (ngoại tiếp elip).

4. Đường chuẩn của elip :

Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là : $x \pm \frac{a}{e} = 0$

Với M $\in$ (E) ta có : $\dfrac{MF_1}{d(M,\Delta_1)} = \dfrac{MF_2}{d(M,\Delta_2)} = e \quad (e<1)$

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. CÔNG THỨC VECTƠ:

Trong không gian với hệ trục Oxyz cho

$\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

$\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ và $k \in R$

Ta có:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

2) $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

3) $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

4) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

5) Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

$$[\vec{a},\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

6) $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.Sin(\vec{a},\vec{b})$

7) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

8) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}$

9) $\vec{a} \perp [\vec{a},\vec{b}]$ hay $\vec{b} \perp [\vec{a},\vec{b}]$

10) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}].\vec{c} = 0$

11) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

Ứng dụng của vectơ:

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$
- $V_{HoäpABCDA'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- $V_{TöùdieänABCD} = \frac{1}{6}.\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

II. TOẠ ĐỘ ĐIỂM:

Trog không gian Oxyz cho $A(x_A;y_A;z_A)$
$B(x_B;y_B;z_B)$

1) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

2) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

3) G là trọng tâm ΔABC, ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

4) G là trọng tâm tứ diện ABCD

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C + X_D}{4} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

5) Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k. Ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases} \quad , k \neq 1$$

6) I là trung điểm của đoạn AB thì:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_2}{2} \end{cases}$$

III. MẶT PHẲNG:

1) Giả sử mp (α) có cặp VTCP là :

$\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

$\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$

Khi đó (α) có VTPT là:

$$\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 a_3\\ b_2 b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 a_1\\ b_3 b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 a_2\\ b_1 b_2\end{vmatrix}\right)$$

2) Phương trình tổng quát của mp (α) :

Ax + By + Cz + D = 0

(với $A^2+B^2+C^2\neq 0$)

trong đó $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT của (α)

3) Phương trình các mặt phẳng toạ độ:

- (Oxy) : z = 0
- (Oyz) : x = 0
- (Oxz) : y = 0

4) Chùm mặt phẳng: Cho hai mặt phẳng cắt nhau: $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

P.t của chùm mp xác định bởi (α_1)và (α_2) là:

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

với $\lambda^2+\mu^2\neq 0$

5) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Vấn Đề 1: Viết phương trình mặt phẳng

P.Pháp:

- Tìm VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ và điểm đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$
- dạng: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Vấn Đề 2: Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm A, B, C

P.Pháp:

- Tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$
- Mp (ABC) có VTPT là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ và qua A
- Kết luận.

Vấn Đề 3: Viết phương trình mp (α) đi qua điểm A và vuông góc BC

P.Pháp:

Mp $(\alpha)\perp$ BC nên có VTPT là $\overrightarrow{BC}$ và qua A

Chú ý:

- Trục Ox chứa $\vec{i}=(1;0;0)$
- Trục Oy chứa $\vec{j}=(0;1;0)$
- Trục Oz chứa $\vec{k}=(0;0;1)$
-

Vấn Đề 4: Viết phương tình mp (β) là mặt phẳng trung trực của AB.

P.Pháp:

- Mp $(\beta)\perp$ AB nên có VTPT là $\overrightarrow{AB}$, và đi qua I là trung điểm của AB
- Kết luận.

Vấn Đề 5: Viết phương tình mp (β) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$

P.pháp:

- $(\beta)//(\alpha)$ nên phương trình (β) có dạng: $Ax+By+Cz+D'=0$
- $M_0\in(\beta)\Rightarrow D'$
- Kết luận

Vấn Đề 6: Viết phương trình mp (P) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mp (Q)

P.Pháp:

- Mp (Q) có VTPT là $\overrightarrow{n_Q}$
- Mp (P) có VTPT là $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_Q}]$ và qua A
- Kết luận

Vấn Đề 7: Viết phương trình mp (α) đi qua các điểm là hình chiếu của điểm M(x_0 ;y_0 ; z_0) trên các trục tọa độ

P.Pháp:

- Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên Ox, Oy, Oz. Thì $M_1(x_0;0;0)$, $M_2(0;y_0;0)$, $M_3(0;0;z_0)$
- Phương trình mp (α) là:

$$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=1$$

Vấn Đề 8: Viết phương trình mp (α) đi qua điểm M_0 và vuông góc với 2 mp (P) và (Q):

P.Pháp:

- (P) và (Q) lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}$
- Mp (α) có VTPT là $[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}]$ và qua M_0
- Kết luận.

Vấn đề 9 : Viết phương trình mp (α) là tiếp diện của mặt cầu (S) tại điểm A.

P.Pháp :

- Xác định tâm I của mặt cầu (S)
- Mp (α) có VTPT là $\overrightarrow{IA}$ và đi qua A
- Kết luận

IV. ĐƯỜNG THẲNG:

A) Phương trình đường thẳng:

1) **Phương trình tham số** của đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in R)$$

2) **Phương trình chính tắc** của đường thẳng đi qua điểm M_0 có VTCP: $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ là

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

với $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$

Qui ước: Nếu $a_i = 0$ thì $x - x_0 = 0$

B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Vấn Đề 1: Tìm VTCP của đường thẳng Δ: là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q)

$$\Delta : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (P) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (Q) \end{cases}$$

P.Pháp:

Δ có VTCP là : $\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_1 & B_2 \end{vmatrix} \right)$

Vấn Đề 2: Viết ptrình đường thẳng Δ:

P.Pháp:

- Cần biết VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0) \in \Delta$
- Viết ptrình tham số theo công thức (2)
- Viết ptrình chính tắc theo công thức (3)

Chú ý:

Viết phương trình tham số hoặc chính tắc là giao tuyến của 2 mặt phẳng . Ta tìm:

- VTCP $\vec{u} = (a_1;a_2;a_3)$ bằng vấn đề 1
- Cho một ẩn bằng 0 hoặc bằng một giá trị nào đó. Giải hệ tìm x, y => z
- Có điểm thuộc đường thẳng
- Kết luận.

Vấn Đề 3: Viết ptrình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

P.Pháp:

- Mp (α) có VTPT là $\vec{n} = (A;B;C)$
- Đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có VTCP là $\vec{n}$
- Viết p.trình chính tắc => Ptrình tổng quát

Vấn Đề 4: Tọa độ điểm H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (α)

P.Pháp:

- Gọi d là đường thẳng đi qua M và $d \perp (\alpha)$. Nên d có VTCP là VTPT $\vec{n}$ của (α)
- Viết phương trình tham số của d $\{H\} = d \cap (\alpha)$
- Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

phương trình $\begin{cases} (d): \\ (\alpha): \end{cases}$ => Tọa độ điểm H

Vấn Đề 5: Tọa độ điểm M' đối xứng của M qua mặt phẳng (α)

P.Pháp:

- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (α) (vấn đề 4)
- Vì H là trung điểm của MM' => tọa độ điểm M'

Vấn Đề 6: Tìm tọa độ điểm M' đối xứng của M_0 qua đường thẳng (d)

P.Pháp:

- Gọi $M'(x';y';z')$
- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và $(P) \perp d$. Nên (P) nhận VTCP của d làm VTPT
- Gọi $\{H\} = d \cap (P)$
- M' là điểm đối xứng của M_0 qua đường thẳng (d). Nên H là trung điểm của đoạn M_0M'

Ta có: $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_0 + x'}{2} \\ y_H = \dfrac{y_0 + y'}{2} \\ z_H = \dfrac{z_0 + z'}{2} \end{cases}$ => M'

Vấn Đề 7: Viết phương trình hình chiếu của d trên mp (α)

P.Pháp:

- Gọi d' là hình chiếu của d trên mp (α)
- Gọi (β) là mp chứa d và $(\beta) \perp (\alpha)$
- Nên (β) có cặp VTCP là : VTCP $\vec{u}_d$ của d và VTPT $\vec{n}_\alpha$ của mp (α)
- Mp (β) có VTPT $\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d, \vec{n}_\alpha]$

- Mp (β) đi qua điểm $M_0 \in d$
- Viết phương trình tổng quát của Mp (β)
- Phương trình đường thẳng d': $\begin{cases}(\alpha):\\(\beta):\end{cases}$

Vấn Đề 8: Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường Δ_1 và Δ_2

P.Pháp:

- Δ_1 có VTCP $\vec{u}_1$
- Δ_2 có VTCP $\vec{u}_2$
- d vuông góc với Δ_1 **và** Δ_2**.** Nên d có VTCP là $\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

Vấn Đề 9: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2

P.Pháp:

- Thay toạ độ A vào phương trình Δ_1 **và** Δ_2 $\Rightarrow A \notin \Delta_1, A \notin \Delta_2$
- Gọi (P) là mp đi qua điểm A và chứa Δ_1
- Gọi (Q) là mp đi qua điểm A và chứa Δ_2
- P.tr đường thẳng d: $\begin{cases}(P):\\(Q):\end{cases}$

Vấn Đề 10: Viết phương trình đường thẳng d $\subset (P)$ cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2.

P.Pháp:

- Gọi $A = \Delta_1 \cap (P)$
- Gọi $B = \Delta_2 \cap (P)$
- Đường thẳng chính là đường thẳng AB

Vấn Đề 11: Viết phương trình đường thẳng d // d_1 và cắt cả hai đường Δ_1 và Δ_2.

P.Pháp

- Gọi (P) là mp chứa Δ_1 và (P) // d_1
- Gọi (Q) là mp chứa Δ_2 và (Q) // d_1
- $d = (P) \cap (Q)$
- Phương trình đường thẳng d $\begin{cases}(P):\\(Q):\end{cases}$

Vấn Đề 12: **Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2)**

P.Pháp:

- d_1 coù vtcp $\vec{a}$, d_2 coù vtcp $\vec{b}$
- Laáy ñieåm A $\in d_1 \Rightarrow$ toïa ñoä ñieåm A theo t_1
- Laáy ñieåm B $\in d_2 \Rightarrow$ toïa ñoä ñieåm B theo t_2
- AB laø ñöôøng vuoâng goùc chung $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB} \perp \vec{a}\\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{b}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{a} = 0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{b} = 0\end{cases}$
- Giaûi heä treân ta tìm ñöôïc t_1 vaø $t_2 \Rightarrow$ toïa ñoä A vaø B
- Vieát phöông trình ñöôøng thaúng AB.

Vấn Đề 13: Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc (P) và cắt hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

P.Pháp:

- Gọi (α) là mp chứa Δ_1 và có một VTCP là $\overrightarrow{n_P}$ (VTPT của mp (P))
- Gọi (β) là mp chứa Δ_2 và có một VTCP là $\overrightarrow{n_P}$ (VTPT của mp (P))
- Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

Vấn Đề 14: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M_0 vuông góc với đường thẳng Δ_1 và cắt đường thẳng Δ_2

P.Pháp:

- Gọi (α) là mp đi qua M_0 và vuông góc Δ_1
- Gọi (β) là mp đi qua điểm M_0 và chứa Δ_2
- Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

Vấn Đề 15: Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) và $d \subset (\alpha), d \perp \Delta$

P.Pháp:

- Gọi $\{A\} = \Delta \cap (\alpha)$
- Gọi (β) là mp đi qua A và vuông góc với Δ . Nên (β) có VTPT là VTCP của Δ
- Đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta)$

V. MẶT CẦU:

1. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và bán kính R là: $(x – a)^2 + (y – b)^2 + (z – c)^2 = R^2$

2. Mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 – 2ax – 2by – 2cz + d = 0$$

(với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 – d > 0$)
thì (S) có tâm I(a; b; c)
và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Vấn Đề 1: Viết phương trình mặt cầu
P.Pháp:

- Xác định tâm I(a ; b ; c) của mặt cầu
- Bán kính R
- Viết phương trình mặt cầu
  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Vấn Đề 2: Viết phương trình mặt cầu đường kính AB
P.Pháp:

- Gọi I là trung điểm của AB. Tính toạ độ I => I là tâm mặt cầu
- Bán kính $R = \frac{1}{2}AB$
- Viết phương trình mặt cầu

Vấn Đề 3: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(a ; b ; c) và tiếp xúc với (α): Ax + By + Cz + D = 0
P.Pháp:

- Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (α). nên có bán kính
  $$R = d(I,(\alpha)) = \frac{|Ax_I + By_I + Cz_I + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
- Viết phương trình mặt cầu

Vấn Đề 4: Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD
P.Pháp:

- Phương trình mặt cầu (S) có dạng
  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
- A, B, C, D thuộc (S).Ta có hệ phương trình
- Giải hệ phương trình tìm a, b, c, d
- Kết luận

Vấn Đề 5: Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy
P.Pháp:

- Gọi I(x_I ; y_I ; 0) là tâm của mặt cầu, $I \in (Oxy)$
- Ta có $AI^2 = BI^2 = CI^2$
  Ta có Hpt $\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$
- Giải Hpt $\Rightarrow$ I $\Rightarrow$ IA = R
- Kết luận.

VI. KHOẢNG CÁCH:

1. Khoảng cách giữa hai điểm AB

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ đến mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0

$$d(M_0,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

3. Khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng d

- Lấy $M_0 \in d$
- Tìm VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}$

$$d(M_1,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ'

- Gọi $\vec{u}$ và $\overrightarrow{u'}$ lần lượt là VTCP của Δ và Δ'
- Δ đi qua điểm M_0 , $M_0' \in \Delta'$

$$d(\Delta,\Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}$$

VII. GÓC:

1. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

$$Cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

2. Góc giữa hai đường thẳng (a) và (b)

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng (a) và (b) $(0 \le \varphi \le 90^0)$

Đường thẳng (a) và (b) có VTCP lần lượt là :

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$Cos\varphi = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

✵ **Đặc biệt:** $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

3. Góc giữa hai mp (α) và (α')

(α): Ax + By + Cz + D = 0

$(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Gọi φ là góc giữa hai mp (α) và (α')

$$Cos\varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

✱ **Đặc biệt:** $(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_{\alpha'}} = 0$

4. Góc giữa đường thẳng (d) và mp (α)

(d): có VTCP là $\vec{u} = (a, b, c)$

(α): Ax + By + Cz + D = 0

Gọi φ là góc nhọn giữa (d) và (α)

$$Sin\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

VIII. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

1. Vị trí tương đối giữa 2mp

Cho 2 mp : $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

- α_1 caét $\alpha_2 \leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$
- $\alpha_1 // \alpha_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng (d) và mp (α)

Caùch 1: d coù vtcp $\vec{a}$, (α) coù vtpt $\vec{n}$

a/. Neáu $\vec{a}.\vec{n} \neq 0 \rightarrow$ d caét (α)

b/. Neáu $\vec{a}.\vec{n} = 0 \rightarrow$ d//(α) hay d$\subset(\alpha)$

Tìm M$\in$d: $\begin{cases} M \notin (\alpha) \rightarrow d // (\alpha) \\ M \in (\alpha) \rightarrow d \subset (\alpha) \end{cases}$

Caùch 2: Giaûi heä pt cuûa d vaø (α)

- Heä coù 1 nghieäm $\Leftrightarrow$ d caét (α)
- Heä voâ nghieäm $\Leftrightarrow$ d // (α)
- Heä voâ soá nghieäm $\Leftrightarrow$ d$\subset(\alpha)$

3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng (d) và đường thẳng (d')

P.Pháp:

+ d coù vtcp $\vec{u}$ vaø ñi qua ñieåm M

+ d' coù vtcp $\overrightarrow{u'}$ vaø ñi qua ñieåm M'

+ Tính $\overrightarrow{MM'}$

a/. d vaø d' truøng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$ vaø $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương.

b/. d // d' $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ vaø } \overrightarrow{u'} \text{ cuøng phöông} \\ \vec{u} \text{ vaø } \overrightarrow{MM'} \text{ khoâng cuøng phöông} \end{cases}$

c/. d caét d' $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ vaø } \overrightarrow{u'} \text{ khoâng cuøng phöông} \\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases}$

d/. d vaø d' cheùo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM'} \neq 0$

*** Chuù yù** : $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{u'}$

5. Vị trí tương đối giữa mp (α) và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R

P.Pháp:

- Tính d(I, (α))
- Nếu d(I, (α)) > R => (α) không cắt (S)
- Nếu d(I, (α)) = R => (α) tiếp xúc (S)
- Nếu d(I, (α)) < R => (α) cắt (S) theo một đường tròn giao tuyến có bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - [d(I, (\alpha))]^2}$$

Gọi d' là đường thẳng đi qua tâm I và $d' \perp (\alpha)$

Gọi $\{H\} = d' \cap (\alpha) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn giao tuyến

6. Tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

P.Pháp:

* Viết phương trình đường Δ về dạng phương trình tham số

* Thay vào phương trình mặt cầu (S) ta được phương trình (✱) theo t

- Nếu ptr (✱) vô nghiệm => Δ không cắt mặt cầu (S)
- Nếu ptr (✱) có nghiệm kép => Δ cắt (S) tại một điểm
- Nếu ptr (✱) có hai nghiệm => Δ cắt (S) tại hai điểm. Thế t = ... vào p.tr tham số của Δ => Tọa độ giao điểm