

p) $\int x(x+1)(x+5)dx$ q) $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$ r) $\int (2x^3 + 1)^2 dx$
 s) $\int (\sqrt[3]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 2)dx$ t) $\int (e^x + 1)^3 dx$ u) $\int 2^x e^x dx$

Bảng 2:

$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$	$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$

VD 04:

a) $\int \frac{3}{2x+5} dx$ b) $\int \frac{1}{2x+2} dx$ c) $\int \frac{4x+4}{x^2+2x+3} dx$
 d) $\int \frac{x+4}{x^2-2x+1} dx$ e) $\int \frac{x^3}{x^2-2x+1} dx$ f) $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx$
 g) $\int (2x+1)^4 dx$ h) $\int 2x(x^2+1)^3 dx$ i) $\int \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2} dx$

Bảng 3:

$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$
$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = \int [1 + \cot^2(ax+b)] dx$ $= -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \int [1 + \tan^2(ax+b)] dx$ $= \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$

VD 05:

a) $\int \sin^2 x dx$ b) $\int \cos^2 x dx$ c) $\int 4(\cos^2 x - \sin^2 x) dx$
 d) $\int \tan^2 x dx$ e) $\int \cot^2 x dx$ f) $\int \sin^3 x dx$
 g) $\int \cos^3 x dx$ h) $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$ i) $\int \cos(3x+4) dx$
 k) $\int \sin 2x dx$ l) $\int \cos \frac{x}{2} dx$ m) $\int \sin x \cos x dx$
 n) $\int \frac{1}{\cos^2(3x+2)} dx$ o) $\int \sin^4 x dx$ p) $\int \cos^4 x dx$
 q) $\int \sin x \cos^2 x dx$ r) $\int \sin 3x dx$ s) $\int \cos^4 x \sin x dx$

II – PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Một số kết quả thường gặp khi tính nguyên hàm

$\int f(x) dx = \int f(t) dt$	$\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$
$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u + C$	$\int u' \cdot u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}.F(ax+b) + C$

2. Các phương pháp tính nguyên hàm

a) Phương pháp đổi biến:

Bước 1: Đặt $t = u(x)$, ta được $dt = u(x)' dx$

Bước 2: Tính nguyên hàm theo biến t.

Bước 3: Thay $t = u(x)$ để được kết quả theo biến x.

VD 06:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\int (x+1)^{100} dx$ | b) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ | c) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ |
| d) $\int \frac{4x+4}{x^2+2x+3} dx$ | e) $\int x^2 \left(\frac{x^3}{18} - 1 \right) dx$ | f) $\int \sin^4 x \cos x dx$ |
| g) $\int e^{\sin x} \cos x dx$ | h) $\int x.e^{1+x^2} dx$ | i) $\int \frac{1}{\sqrt{5x+4}} dx$ |
| j) $\int \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$ | k) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$ | l) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$ |
| m) $\int 3x\sqrt{7-3x^2} dx$ | n) $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$ | o) $\int x \cos(x^2) dx$ |
| p) $\int \tan x dx$ | q) $\int \cot x dx$ | r) $\int \frac{x}{3} e^{2x} dx$ |

b) Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần:

$$I = \int f(x)g(x)dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = f(x)' dx \\ v = \int g(x) \end{cases}$$

Khi đó: **$I = uv - \int vdu$**

VD 07:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| a) $\int x \cos x dx$ | b) $\int \ln x dx$ | c) $\int x^2 e^x dx$ |
| d) $\int \ln^2 x dx$ | e) $\int x \sin \frac{x}{2} dx$ | f) $\int x e^x dx$ |
| g) $\int x^2 \cos x dx$ | h) $\int x^2 \sin x dx$ | i) $\int x^2 \cos 2x dx$ |
| j) $\int x^3 \ln(2x) dx$ | l) $\int e^{\sqrt{3x-9}} dx$ | |

LUYỆN TẬP

Phương Pháp: nguyên hàm hữu tỉ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

- Nếu bậc của P(x) lớn hơn bậc của Q(x) thì ta chia P(x) cho Q(x)
- Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x):

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{(n-1)} \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$

1) Tính các nguyên hàm sau:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$ | b) $\int \frac{x+1}{x^2 - 4} dx$ | c) $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$ |
| d) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$ | e) $\int \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} dx$ | f) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$ |
| g) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x - 6}$ | h) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ | i) $\int \frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6} dx$ |
| j) $\int \frac{x^3}{x+1} dx$ | k) $\int \frac{x^5}{1-x^2} dx$ | l) $\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ |
| m) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} dx$ | n) $\int \frac{1}{4x^2 - 4x + 1} dx$ | o) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$ |
| p) $\int \frac{x+1}{x^3 - 1} dx$ | q) $\int \left(3x^2 - \frac{2}{x^3} \right)^2 dx$ | r) $\int x(x+1)(x+2) dx$ |
| s) $\int \frac{x^2}{x-3} dx$ | t) $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$ | u) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$ |

2) Tính:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\int e^x \sqrt{2^x} dx$ | b) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$ | c) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$ |
| d) $\int \frac{2^{x+1} - 6^{x-1}}{10^x} dx$ | e) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ | f) $\int \frac{(\ln x + 1)^2}{x} dx$ |
| g) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$ | h) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ | i) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 4}} dx$ |
| j) $\int \frac{\ln \sqrt[3]{x+1} }{x+1} dx$ | k) $\int \frac{1}{e^x + e^{2x}} dx$ | l) $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$ |

3) Tính các nguyên hàm sau:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$ | b) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$ | c) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$ |
| d) $\int \left(x - \frac{1}{x} \right) \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} dx$ | e) $\int \frac{\sqrt{x} - 13x^2 + x^2 e^x}{x^2} dx$ | f) $\int \sqrt{x^4 + x^{-4} + 2} dx$ |
| g) $\int x \sqrt{2-5x} dx$ | h) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$ | i) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} dx$ |
| j) $\int x \sqrt{1+xd} dx$ | k) $\int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | l) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx$ |
| m) $\int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$ | n) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}}$ | o) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{2}x) + \sqrt{x+1}}}{4x^6 - 5x + \sqrt{x}} dt$ |

4) Tính:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\int \frac{4}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ | b) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ | c) $\int \left(4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx$ |
| d) $\int \frac{\sin^3 x - 2}{3 \sin^2 x} dx$ | e) $\int \tan^2 x dx$ | f) $\int \tan^3 x dx$ |

g) $\int \tan^4 x dx$

h) $\int \tan^5 x dx$

i) $\int \tan^6 x dx$

j) $\int \cot^2 x dx$

k) $\int \cot^3 x dx$

l) $\int \tan^n x dx, n \in \mathbb{Z}$

5) Tính các nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$

b) $\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx$

c) $\int \sin 2x \cos 8x dx$

d) $\int \cos^3 x \sin 8x dx$

e) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$

f) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

g) $\int \frac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x} dx$

h) $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

i) $\int \sin^4 x \cos x dx$

j) $\int \frac{dx}{\cos^5 x \sin^3 x}$

k) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

l) $\int \sin^7 x \cos^3 x dx$

m) $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$

n) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

o) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

p) $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$

q) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 1}$

r) $\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}, \cos x \neq 0$

s) $I = \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$ và $J = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx$. Tính I, J

6) Tính nguyên hàm các hàm số sau:

a) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

b) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

c) $\int x \tan^2 x dx$

d) $\int \cos x \ln(1 + \cos x) dx$

e) $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

f) $\int \frac{\sin x \cos x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$

B – TÍCH PHÂN

I – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa và tính chất cơ bản

Mọi tính chất đã học của nguyên hàm ở trên đều sử dụng được cho tích phân. Ok! ☺

Định nghĩa:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

VD 08:

a) $\int_3^5 \frac{1}{x} dx$

b) $\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

c) $\int_0^1 (1 + 7x)^{2010} dx$

Các tính chất của tích phân:

Tính chất 1	$\int_a^a f(x) dx = 0$
Tính chất 2	$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
Tính chất 3	$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

VD 09:

a) $\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 2) dx$

b) $\int_1^4 \left(t + \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right) dt$

c) $\int_1^1 (5x^4 + 2) dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x - \sin 2x) dx$

e) $\int_0^1 (3^y - 2^y)^2 dy$

f) $\int_0^1 s \cdot s^2 \cdot s^3 \dots s^9 ds$

g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$

h) $\int_0^3 |x^2 - x - 2| dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 3x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos 3x dx$

II – PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến dạng 1

Bước 1: Đặt $t = u(x)$, ta được $dt = u(x)' dx$

Bước 2: Đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline t & t_1 & t_2 \end{array}$

Bước 3: Thay cận và biến t ta được tích phân theo biến t. Tính tích phân trên theo định nghĩa.

VD 10:

a) $\int_1^3 \sqrt{2x+3} dx$

b) $\int_1^2 x e^{x^2} dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$

d) $\int_0^1 t^3 (1+t^4) dt$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

f) $\int_0^1 \frac{5x}{(x^2+4)^2} dx$

g) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 3x) \sin 3x dx$

i) $\int_0^1 \sqrt{t^5 + 2t} (2 + 5t^4) dt$

2. Phương pháp đổi biến dạng 2

Bước 1: Đặt $x = u(t)$, ta được $dx = u(t)' dt$

Bước 2: Đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ \hline t & t_1 & t_2 \end{array}$

Bước 3: Thay cận và biến t ta được tích phân theo biến t. Tính tích phân trên theo định nghĩa.

VD 11:

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

d) $\int_0^1 \frac{x^4}{x^4-1} dx$

e) $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx$

f) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

3. Phương pháp tích phân từng phần

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = f(x)' dx \\ v = \int g(x) \end{cases}$$

Khi đó: $I = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

VD 12:

a) $\int_0^1 x e^x dx$

b) $\int_1^2 x \ln x dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

e) $\int_1^2 x^5 \ln x dx$

f) $\int_0^1 (x+1)e^x dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx$

h) $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

i) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$

LUYỆN TẬP

Phương pháp: Tích phân hàm hữu tỉ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

➤ Nếu $P(x)$ có bậc lớn hơn $Q(x)$: chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được $\int \left(A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx$

➤ Nếu $P(x)$ có bậc nhỏ hơn $Q(x)$: tương tự với việc ta tính $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$

+ Xét $Q(x) = ax^2 + bx + c$ (có bậc 2) thì $R(x) = mx + n$

TH 1: $Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (x_1, x_2 là hai nghiệm của $Q(x) = 0$)

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \right) dx \text{ với } \int \frac{k}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{k}{a-b} \int \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right) dx$$

TH 2: $Q(x) = a(x-x_0)^2$ (x_0 là nghiệm kép của $Q(x) = 0$)

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} \right) dx$$

TH 3: $Q(x) = 0$ vô nghiệm, ta phân tích để $R(x) = A.Q(x)' + B$ và khi đó:

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A.Q(x)'}{Q(x)} + \frac{B}{Q(x)} \right) dx$$

Trường hợp 3 này ta sử dụng phương pháp đổi biến dạng 2.

+ Xét $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (có bậc 3) thì $R(x) = mx^2 + nx + p$

TH 1: $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} \right) dx$$

TH 2: $Q(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)$

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_2} \right) dx$$

TH 3: $Q(x) = (x-x_0)^3$

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3} \right) dx$$

TH 4: $Q(x) = (x-x_0)(ax^2 + bx + c)$

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A}{x-x_0} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \right) dx$$

+ Xét $Q(x)$ là hàm có bậc lớn hơn 3 thì bài toán chỉ xét với dạng đơn giản.

1) Tính các tích phân sau

a) $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx$

b) $\int_0^1 x(1-x)^{19} dx$

c) $\int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx, \quad n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$

d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{x(x+1)^2} dx$	e) $\int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2} dx$	f) $\int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx$
g) $\int_2^3 \frac{x^4-2}{x^3-x} dx$	h) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2}$	i) $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx$
j) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$, đặt $t = \frac{1}{x}$	k) $\int_1^2 x(1-x)^5 dx$	l) $\int_1^2 \frac{1-x^2}{1+x^4} dx$
m) $\int_2^5 \frac{1+x}{1-x} dx$	n) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$	o) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$
p) $\int_1^2 (2\sqrt{x}-1)^2 dx$	q) $\int_0^1 (x+2)^{10} dx$	r) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{2x^2+1}{x^2+1} dx$
s) $\int_0^4 \frac{xdx}{x^2+4}$	t) $\int_{-2}^1 \frac{xdx}{x^2+2x+2}$	u) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+2x+1}$
v) $\int_1^4 (3x+1)^7 dx$	w) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$	x) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$
y) $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+4x+5}$	z) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$	

Phương pháp: Tích phân hàm lượng giác

➤ Biến đổi về tích phân cơ bản (sử dụng các công thức lượng giác)

➤ Đổi biến số

+ Đổi biến số để hữu tỉ hóa tích phân hàm lượng giác (PP đổi biến số)

+ Đổi biến số theo chu kỳ của hàm lượng giác. Quy tắc chung: Đặt $t = \pi - x, t = \frac{\pi}{2} - x$

(Tích phân đặc biệt – các hằng đẳng thức tích phân)

+ Đổi biến qua $t = \tan \frac{x}{2}$. Khi đó: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \cot x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Tích phân lượng giác tổng quát: $\int \frac{a \sin x + b \cos x + c}{d \sin x + e \cos x + f} dx$, ta biến đổi

$$\frac{a \sin x + b \cos x + c}{d \sin x + e \cos x + f} \equiv A + B \frac{(d \sin x + e \cos x + f)'}{d \sin x + e \cos x + f} = A + B \frac{d \cos x - e \sin x}{d \sin x + e \cos x + f}$$

➤ Sử dụng công thức tích phân từng phần

Chú ý các công thức lượng giác:

$$2 \sin x \cdot \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \cos x \cdot \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

$$2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

2) Tính (biến đổi về tích phân cơ bản)

- a) $\int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$
- d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin 2x}$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ f) $\int (\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x) dx$
- g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$ h) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \cos 3x dx$ i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$ đổi sin ra cos
- j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x dx}{\cos x + 1}$ k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^2 2x dx$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 2x dx$

3) Tính (đổi biến hữu tỉ hóa tích phân lượng giác)

- a) $\int \frac{dx}{\cos 3x}$ b) $\int \frac{\sin(a+x)}{\cos^2 x} dx$ c) $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}$
- d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \sin^2 x) dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x (1 + \cos x)^2 dx$
- g) $\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{dx}{\sin \frac{x}{2}}$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{1 + \cos x} dx$ i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$
- j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5(5 - 4 \cos t)^{\frac{1}{4}} \sin t dt$ k) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$
- m) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1 + 4 \sin 3x \cos 3x} dx$ n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{1 + \sin x} dx$ o) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$
- p) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}$ q) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$ r) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$
- s) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 3}$ t) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} dx$

4) Tính (đổi biến qua $t = \tan \frac{x}{2}$)

- a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2}$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$
- d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + 2 \sin x}$ f) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + 2 \cos x} dx$
- g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x - 3 \sin x + 1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$

5) Tính (sử dụng công thức tích phân từng phần)

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$ | b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ | c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin^2 x dx$ |
| d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos^2 x dx$ | e) $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$ | f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2-1) \sin x dx$ |
| g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1+\cos x) dx$ | h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$ | i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$ |
| j) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$ | k) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ | l) $\int_0^{\pi} x \cos^2 x dx$ |
| m) $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx$ | n) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{2 \cos^2 x}$ | o) |

Phương pháp: Tích phân hàm vô tỉ (chứa căn thức)

➤ Đổi biến số đưa về tích phân hữu tỉ

Sử dụng phương pháp đổi biến dạng 1

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx \quad \text{Đặt } t = x + \sqrt{x^2 \pm a}, \text{ (phép thế Ôle)}$$

➤ Đưa tích phân vô tỉ về tích phân lượng giác (Phương pháp đổi biến dạng 2)

$$\int_a^b \frac{1}{a^2 + x^2} dx \quad \text{Đặt } x = a \tan t$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad \text{Đặt } x = a \sin t \text{ hoặc } x = a \cos t$$

$$\int_a^b \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \text{Đặt } x = a \sin t \text{ hoặc } x = a \cos t$$

➤ Sử dụng tích phân từng phần

$$\int_a^b \sqrt{x^2 \pm a} dx \quad \text{Sử dụng tích phân từng phần}$$

6) Tính các tích phân sau (Đổi biến số đưa về tích phân hữu tỉ)

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\int_3^7 \sqrt{x-3} dx$ | b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}}$ | c) $\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{1+x^2} dx$ |
| d) $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ | e) $\int_1^9 x \sqrt{1-x} dx$ | f) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1} dx$ |
| g) $\int_0^1 x^2 \sqrt[8]{1-x} dx$ | h) $\int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$ | i) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ |
| j) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx$ | k) $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2-1} dx$ | l) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ |

- | | | |
|---|---|--|
| m) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$ | n) $\int_1^9 x^3\sqrt{1-x} dx$ | o) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| p) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$ | q) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}$ | r) $\int_1^2 \frac{xdx}{x+\sqrt{x^2+1}}$ |
| s) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ | t) $\int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ | u) $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$ |
| v) $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x} dx$ | x) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ | |

7) Tính (Lượng giác hóa tích phân vô tỉ)

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2} dx$ | b) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | c) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, đặt $x = \tan t$ |
| g) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x+1}} dx$ | h) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^6+1}$ | i) $\int \frac{dx}{x^2+9}$ |
| j) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ | k) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ | l) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ |
| m) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ | n) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} dx$ | o) $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2-x^2} dx, a > 0$ |
| p) $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$ | q) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ | r) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ |
| s) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ | t) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$, đặt $x = \cos t$ | u) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$ |

8) Tính (sử dụng tích phân từng phần)

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$ | b) $\int_0^1 \sqrt{x^2-1} dx$ |
|-------------------------------|-------------------------------|

Phương pháp: Tích phân hàm siêu việt (mũ – logarit)

➤ Đổi biến số đưa về tích phân hữu tỉ

➤ Sử dụng tích phân từng phần

9) Tính (Đổi biến số đưa về tích phân hữu tỉ)

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| a) $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$ | b) $\int_1^3 \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$ | c) $\int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{2+e^x}$ |
| d) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ | e) $\int_0^3 x e^{-x^2} dx$ | f) $\int_0^1 \frac{\ln(2-x)}{2-x} dx$ |
| g) $\int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x-1} dx$ | h) $\int \sqrt{e^x+e^{-x}+2} dx$ | i) $\int_1^e \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x+2}}$ |

j) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

m) $\int_0^1 \frac{(1 + e^x)^2 dx}{1 + e^{2x}}$

p) $\int_1^e \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$

r) $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$

u) $\int_0^1 2^x e^x dx$

x) $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

10) Tính (sử dụng tích phân từng phần)

a) $\int_1^e x^2 \ln x dx$

d) $\int_1^e \frac{1 + x \ln x}{x} dx$

g) $\int_2^3 [\ln(x-1) - \ln(x+1)] dx$

j) $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx$

p) $\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx$

s) $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$

v) $\int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$

y) $\int_1^e x \ln^2 x dx$

k) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 5}$

n) $\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}} dx$

q) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$, đặt $t = -x$ rồi sử dụng phép truy hồi

s) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

v) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x dx}{\sqrt{1 + \ln^2 |\cos x|}}$

y) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\ln x) dx$

b) $\int_0^{\ln 2} x e^{-2x} dx$

e) $\int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$

h) $\int_{-1}^1 (x+3)e^x dx$

k) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x) dx$

n) $\int_1^e x^2 \ln^2 x dx$

q) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx$

t) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

w) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx$

z) $\int_1^2 \ln(x+1) dx$

l) $\int_{\ln 2}^1 \frac{dx}{e^x - 4e^{-x}}$

o) $\int_1^e \frac{\ln(ex)}{3 + x \ln x} dx$

t) $\int_0^2 e^{\frac{-x}{2}} dx$

w) $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{\pi-1}{e^4}} \frac{dx}{x \cos^2(\ln x + 1)}$

z) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$

c) $\int_0^1 \ln(2x+1) dx$

f) $\int_1^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$

i) $\int_1^2 (2x-1) \ln x dx$

l) $\int_0^1 (1+x)^2 e^{2x} dx$

o) $\int_1^e x^3 \ln x dx$

r) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx$

u) $\int_0^1 [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]^3 dx$

x) $\int_0^1 (x^2 + x)e^x dx$

Phương pháp: Tích phân hàm chứa trị tuyệt đối

Được ứng dụng nhiều trong các bài toán tính diện tích hình phẳng và thể tích vật thể

Bước 1: xét dấu biểu thức chứa trị tuyệt đối trên các đoạn

Bước 2: Chia đoạn $[a;b]$, $[b;c]$, $[c;d]$, ...

Bước 3: Tính $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \dots$

11) Tính

a) $\int_0^2 |x^2 - 1| dx$

b) $\int_{-5}^{-1} \frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{1-x} dx$

c) $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$

d) $\int_{-3}^3 |x-2| dx$

e) $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$

f) $\int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$

g) $\int_0^2 \sqrt{x^2 + x^{-2} - 2} dx$

h) $\int \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} dx$

i) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos 2x} dx$

j) $\int_0^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$

Phương pháp: Tích phân đặc biệt – Các hằng đẳng thức tích phân

➤ $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$, khi đó $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & f \text{ là hàm chẵn} \\ 0 & f \text{ là hàm lẻ} \end{cases}$

➤ $f(x)$ liên tục, chẵn trên $[-a;a]$, khi đó $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x)dx$, đặt $t = -x$

➤ $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$, khi đó $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 [f(x) + f(-x)]dx$

➤ $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$, khi đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx, \text{ đặt } t = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx, \text{ đặt } t = \pi - x$$

Chú ý: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ đặt $t = a+b-x$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}, m, n \text{ là các số nguyên dương}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx, f(x) \text{ liên tục}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \text{ với } n \in \mathbb{N}$$

12) Tính

a) $\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

b) $\int_{-2}^2 \cos x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

c) $\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})^3 dx$

13) Tính

a) $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{1+2^x} dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 |\sin x|}{1+2^x} dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin 2x \cos 5x}{e^x + 1} dx$

14) Tính

a) $\int_{-1}^1 \frac{x^4 + \sin x}{x^2 + 1} dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$

c) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$, đặt $t = \frac{1}{x}$

15) Tính

a) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

b) $\int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) dx$

C - ỨNG DỤNG

LUYỆN TẬP

D – ÔN TẬP

1) Tính các nguyên hàm sau:

a) $\int (x^3 + 2x^2 - 4) dx$

b) $\int (ax^2 + b)^3 dx$

c) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx$

d) $\int \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^4 dx$

e) $\int (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})^2 dx$

f) $\int (a^x + 1)^3 dx$

g) $\int (a^x + b^x)^2 dx$

h) $\int \sqrt{a^x + a^{-x} + 2} dx$

i) $\int \sqrt{a^x + a^{-x} - 2} dx$

j) $\int \tan x dx$

k) $\int \frac{2 \cos x}{3 + 2 \sin x} dx$

l) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$

m) $\int \frac{3x+1}{(x+1)^3} dx$

n) $\int (x-9)^4 dx$

o) $\int \frac{1}{(2-x)^2} dx$

p) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

q) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

r) $\int \frac{1 - \cos 2x}{\cos^2 x} dx$

s) $\int \frac{xdx}{(x+1)^3}$

t) $\int \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 1}{x} dx$

u) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$

v) $\int (2^x + x^2) dx$

w) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

x) $\int (2x-1)(x^2 - x + 3) dx$

y) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ z) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

2) Tính các nguyên hàm sau bằng phương pháp đổi biến số:

a) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$	b) $\int xe^{-x^2} dx$	c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$
d) $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx$	e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$	f) $\int \sin x \cos^5 x dx$
g) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx$	h) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$	i) $\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot dx$
j) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$	k) $\int \cos \sqrt{x} dx$	l) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$
m) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$	n) $\int \frac{x^3}{x^4 - 4} dx$	o) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$
p) $\int e^{\sin x} \cos x dx$	q) $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$	r) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$
s) $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$	t) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - 6x^2 + 1} dx$	

3) Áp dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần tính các nguyên hàm sau:

a) $\int (1-2x)e^x dx$	b) $\int xe^{-x} dx$	c) $\int x \ln(1-x) dx$
d) $\int x \sin^2 x dx$	e) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$	f) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$
g) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$	h) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$	i) $\int x(3-x)^5 dx$
j) $\int (2^x - 3^x)^2 dx$	k) $\int x\sqrt{2-5x} dx$	l) $\int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)} dx$
m) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$	n) $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}} dx$	o) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$
p) $\int \sin 3x \cos 2x dx$	q) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$	r) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$
s) $\int x^2 \sin x dx$	t) $\int x^2 \ln(x+1) dx$	u) $\int \cos x \ln(1 + \cos x) dx$
v) $\int e^x \cos x dx$	w) $\int xe^x dx$	x) $\int x^2 e^x dx$

4) Bằng cách biến đổi các hàm số lượng giác hãy tính:

a) $\int \sin^4 x dx$	b) $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$	c) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$
d) $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$	e) $\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx$	f) $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$
g) $\int \sin 4x \sin 6x dx$	h) $\int \sin 3x \cos 7x dx$	i) $\int \sin 3x \cos 2x dx$

5) Tìm nguyên hàm của mỗi hàm số sau:

a) $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$	b) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx$	c) $\int \frac{2x-1}{x^2 - 2x + 2} dx$
d) $\int \frac{1}{(x-3)(x-4)} dx$	e) $\int \frac{2x}{(x-1)(x-3)} dx$	f) $\int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx$
g) $\int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$	h) $\int \frac{x-2}{x^2 + 2x + 1} dx$	i) $\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$

- | | | |
|-----------------------------------|--|--|
| j) $\int \frac{x^2}{x^2+2x+1} dx$ | k) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$ | l) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} dx$ |
| m) $\int \frac{x}{x^4-4} dx$ | n) $\int x\sqrt{1+x} dx$ | o) $\int x\sqrt{1-x} dx$ |
| p) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ | q) $\int x\sqrt{1+x^2} dx$ | r) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}} dx$ |
| s) $\int \frac{x^2}{x^4-4} dx$ | t) $\int \frac{x^3+3x^2+x-1}{x^2+1} dx$ | u) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+3} dx$ |
| v) $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx$ | w) $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ | x) $\int \frac{4x+1}{(x-2)^3} dx$ |
| y) $\int \frac{3}{x^2-4} dx$ | z) $\int \left(\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$ | |

6) Tính các tích phân hữu tỉ

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+3}$ | b) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$ | c) $\int_0^1 x(x-1)^{2003} dx$ |
| d) $\int_0^1 \frac{3x^4+x^3+x+1}{x^2+1} dx$ | e) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+4}$ | f) $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+4x+4}$ |
| g) $\int_4^6 \frac{dx}{x^2-5x+6}$ | h) $\int_4^6 \frac{xdx}{x^2-5x+6}$ | i) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ |
| j) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ | k) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}$ | l) $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}, a > 0$ |
| m) $\int_0^1 \frac{6x+2}{x^2-x+1} dx$ | n) $\int_0^1 \frac{4x+1}{x^2+x+1} dx$ | o) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ |
| p) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2}$ | q) $\int_2^3 \frac{x^7 dx}{x^8-2x^4+1}$ | r) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+9}$ |
| s) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$ | t) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-2}$ | u) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$ |
| v) $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx$ | w) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x+1}$ | |

7) Tính các tích phân hàm vô tỉ

- | | | |
|---------------------------------------|---|----------------------------------|
| a) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$ | b) $\int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$ | c) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} dx$ |
|---------------------------------------|---|----------------------------------|

8) Tính các tích phân hàm vô tỉ và trị tuyệt đối

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|--|
| a) $\int_0^2 \sqrt{x} x-1 dx$ | b) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+ x-1 }$ | c) $\int_0^3 \frac{x^2+ x-1 }{x^2+ x-2 } dx$ |
|--------------------------------|------------------------------------|--|

9) Tính các tích phân hàm lượng giác

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|---|
| a) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ | b) $\int \frac{dx}{\sin x}$ | c) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$ |
| d) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ | e) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ | f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx$ |

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

h) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx$

k) $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{1}} (x^2 + 1) \sin x dx$

m) $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

n) $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

o) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx$

p) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x^2 dx$

q) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

r) $\int \left(\cot^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx$

s) $\int \frac{\sin x}{1 + 4 \cos x} dx$

t) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

u) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

v) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

w) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 - x) \sin 3x dx$

x) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

y) $\int \left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{1 - \cos x}{2} \right) dx$

10) Tính các tích phân hàm siêu việt

a) $\int_0^1 x^2 e^{3x^3} dx$

b) $\int_1^e (xe^x + \log^2 x) dx$

c) $\int_1^e \frac{\ln x \sqrt{2 + \ln^2 x}}{x} dx$

d) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$

e) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(\cos x) dx$

f) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 - \cos x) dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

h) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

i) $\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \right) dx$

j) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$

k) $\int_0^1 x e^{3x} dx$

l) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$

m) $\int_2^5 2x \ln(x-1) dx$

n) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x dx$

o) $\int_0^1 e^x \sin^2(\pi x) dx$

p) $\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

q) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ln(\tan x) dx$

r) $\int_1^{e^2} \cos^2(\ln x) dx$

s) $\int_1^e e^{x+\ln x} dx$

t) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x \ln x dx}{(x^2 + 1)^2}$

u) $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}$

11) Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến dạng 2 và các tích phân đặc biệt

12) Ứng dụng của tích phân

Tính diện tích các phẳng giới hạn bởi

Tính thể tích các khối giới hạn bởi

13) Tính (đề thi TN, THPT) bao gồm cả các bài ứng dụng

14) Tính (đề thi ĐH CĐ 2000 – 2004) bao gồm cả các bài ứng dụng

15) Tính (đề thi ĐH CĐ 2004 – 2010) bao gồm cả các bài ứng dụng